

MAP1142 – ANALIZA MATEMATYCZNA 1.1A

Listy zadań

Lista 1

1.1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:

- a) „Amsterdam jest stolicą Holandii”; b) „liczba 123888 jest podzielna przez 8”; c) „ $a^2 + b^2 = c^2$ ”;
d) „trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest ostrokątny”; e) „ $2^5 \geq 32$ ”; f) „ $\Delta = b^2 - 4ac$ ”.

1.2. Napisać zaprzeczenia zdań:

- a) „jem śniadanie i słucham radia”; b) „kwadrat nie jest pięciokątem”;
c) „stolicą Polski jest Gniezno lub Wrocław”; d) „jeśli jutro będzie ciepło, to pójdę na basen”;
e) „liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 3”.

1.3. Ocenic prawdziwość zdań złożonych:

- a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na \mathbb{R} ”;
b) „ $(-1)^{44} = -1$ lub 2008 jest liczbą parzystą”;
c) „funkcja $g(x) = \sin x$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x$ nieparzysta”;
d) „jeżeli Piotr jest synem Tadeusza, to Tadeusz jest starszy od Piotra”;
e) „liczba 13579 jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ jest podzielna przez 9”.

1.4. Czy podane funkcje zdaniowe są prawami logicznymi:

- a) $\neg(p \vee q) \implies [(\neg p) \wedge (\neg q)]$; b) $p \implies [(q \wedge \neg q) \implies r]$; c) $(p \implies q) \iff [(\neg p) \vee q]$; d) $[p \wedge (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge q]$?

1.5. Zbiory określone za pomocą formy zdaniowej zapisać w prostszej postaci:

- a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$; b) $\{n \in \mathbb{N} : \text{liczba } n^2 - n \text{ jest parzysta}\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 3) \vee (x \geq 5)\}$; d) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ jest podzielne przez } 5\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 0) \implies (x^2 > 0)\}$; f) $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{N} \wedge x < y < z \wedge xyz = 16\}$.

1.6. Podać przykłady warunków, które spełniają tylko elementy zbiorów:

- a) $[-1, 7]$; b) {trójkąt równoboczny, kwadrat}; c) $\{2, 4, 6, \dots\}$;
d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots\right\}$; e) $\{1\} \cup [2, 3]$; f) $\{-1, 1, -3, 3, -5, 5, -15, 15\}$.

1.7. Zbadać, czy podane formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

- a) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \sin x = \frac{1}{2}$; b) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 4x + 3 > 0$; c) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} x^2 - y^2 = 0$;
d) $\bigvee_{y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} xy = 0$; e) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} (y \leq x) \vee (y > x)$; f) $\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \bigvee_{x \in \mathbb{R}} ! x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \wedge \operatorname{tg} x = y$.

1.8. Dla podanych par zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ wyznaczyć $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A^c, B^c, A \Delta B$:

- a) $A = (0, 5), B = [0, 7]$; b) $A = (-\infty, 3), B = [-1, \infty)$;
c) $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$; d) $A = \mathbb{N}, B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

Wskazać te pary A, B , dla których $A \subset B$.

1.9. Wyznaczyć wszystkie podzbiory zbioru $\{O, \Delta, \square\}$.

1.10. Która z relacji $A \subset B$, czy $B \subset A$ zachodzi, gdy:

- a) $A \cup B = A$; b) $A \cup B \subset A$; c) $A \setminus B = A$; d) $B \subset A \cap B$?

Lista 2

2.1. Określić i narysować dziedziny funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$; b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$; c) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$;
d) $f(x) = \sqrt{-(x+3)^4}$; e) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; f) $f(x) = \frac{x-4}{x^2-8x+16}$.

2.2. Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz podać ich dziedziny, jeżeli:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$;
c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$; d) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.

2.3. Uzasadnić, że złożenie funkcji:

- a) rosnących jest funkcją rosnącą;
b) rosnącej i malejącej jest funkcją malejącą;
c) malejących jest funkcją rosnącą.

2.4. Znaleźć funkcje f i g takie, że $h = f \circ g$, jeżeli:

a) $h(x) = x^2$; b) $h(x) = x^4 + 2x^2 - 2$; c) $h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 1}$;
d) $h(x) = \frac{|x|+1}{|x|-1}$; e) $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$; f) $h(x) = 2^{x^2}$.

Czy funkcje f i g są wyznaczone jednoznacznie?

2.5. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = 2x - 3$, \mathbb{R} ; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; c) $f(x) = x^4$, $[0, \infty)$;
d) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $(2, \infty)$; e) $f(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$; f) $f(x) = x - \sqrt{x}$, $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$.

2.6. Korzystając z wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$ naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = \sqrt{x-2}$; b) $y = 2\sqrt{x}$; c) $y = \sqrt{2-x}$;
d) $y = 2 - \sqrt{x}$; e) $y = 1 + \sqrt{x}$; f) $y = 1 - \sqrt{x+1}$.

2.7. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; b) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$; c) $f(x) = x^6 \operatorname{sgn} x$;
d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 2+x & \text{dla } x \geq 0; \end{cases}$ e) $f(x) = 2^{x-1}$; f) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$;
g) $f(x) = \log(x+2)$; h) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$; i) $f(x) = \log_2^3(x+1)$.

Lista 3

3.1. Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \sin \frac{x}{3}$; c) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
d) $y = 1 + \sin x$; e) $y = \frac{1}{2} \sin x - 1$; f) $y = \sin 2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

3.2. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = \sin x - \left|\frac{1}{2} \sin x\right|$; b) $y = 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; c) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$; d) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

3.3. Korzystając ze wzorów redukcyjnych zapisać podane wyrażenia w postaci funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; **b)** $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$; **c)** $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; **d)** $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

3.4. Uzasadnić tożsamości trygonometryczne:

a) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$; **b)** $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$; **c)** $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$;
d) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$; **e)** $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; **f)** $\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Dla jakich kątów α są one prawdziwe?

3.5. Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; **b)** $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$; **c)** $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17}\right)$; **d*)** $\sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2)$.

3.6. Funkcje odwrotne do podanych zapisać przy pomocy funkcji cyklometrycznych:

a) $f(x) = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; **b)** $f(x) = \cos x, x \in [\pi, 2\pi]$;
c) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; **d)** $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in (\pi, 2\pi)$.

Naszkiecować wykresy otrzymanych funkcji odwrotnych.

Lista 4

4.1. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

a) $a_n = \frac{2 + \cos n}{3 - 2 \sin n}$; **b)** $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$; **c)** $a_n = \frac{4^n - 1}{2^n + 3}$;
d) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$; **e)** $a_n = \frac{1}{4^1+1} + \frac{1}{4^2+2} + \dots + \frac{1}{4^n+n}$; **f)** $a_n = 2^n - 3^n$.

4.2. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$; **b)** $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; **c)** $a_n = \frac{n!}{10^n}$;
d) $a_n = \frac{1}{n^2 - 6n + 10}$; **e)** $a_n = \frac{4^n}{2^n + 3^n}$; **f)** $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

4.3. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnić równości:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$; **b)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$; **c)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = 2$;
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n+5} = 0$; **e)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n+3) = \infty$; **f)** $\lim_{n \rightarrow \infty} (10 - \sqrt[3]{n}) = -\infty$.

4.4. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+4}$; **b)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2+1}$; **c)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$;
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{20}+2)^3}{(n^3+1)^{20}}$; **e)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{2+4+\dots+2n}$; **f)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n-4^n}{5^n-3^n}$;
g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$; **h)** $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n})$; **i)** $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+6\sqrt{n}+1} - \sqrt{n})$.

4.5. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granice:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n + 2}; & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor n\pi \rfloor}{n}; & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + \sin n}; \\
\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}; & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n2^n + 1}; & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right); \\
\text{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{\lfloor n\sqrt{3} \rfloor}; & \text{h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}}; & \text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+2]{3^n + 4^{n+1}}.
\end{array}$$

4.6. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć granice:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n-2}; & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1} \right)^{15n}; & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n; \\
\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{5-2n}; & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^{n^2}; & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3n+2}{5n+2} \right)^n \cdot \left(\frac{5n+3}{3n+1} \right)^n \right].
\end{array}$$

Lista 5

5.1. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach znaleźć granice:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + 5}; & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n + (-3)^n); & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n - 2)n^2; \\
\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n \left(5 - \frac{1}{n} \right)^n \right]; & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - 10n^6 + 1); & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).
\end{array}$$

5.2. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n}; & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1); & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n - 3^n); \\
\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n; & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (n+1)!}{n! + 2}; & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{n} \right)^n; \\
\text{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{\arctg n}; & \text{h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n [\ln(n+1) - \ln n]}; & \text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg 2^n}{2^n}.
\end{array}$$

5.3. Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej lub niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{x \rightarrow 3} (x-2)^5 = 1; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\pi} [x] = -4; \\
\text{d)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{sgn}(\cos x) = -1; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{x^2 - 9} = 0; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x + 1) = 1; \\
\text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{x^3 + 1} = -2; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x}{|x^2 + 2x - 3|} = -\infty.
\end{array}$$

5.4. Wskazując odpowiednie dwa ciągi uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-3}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} [x^2]; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \sqrt{x}; \\
\text{d)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos \frac{1}{x^2}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn}(x+1)}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 5} (x - [x]).
\end{array}$$

5.5. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć granice:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 1}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}; \\
\text{d)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{1 - x^2}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-5)}.
\end{array}$$

Lista 6

6.1. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć granice (cd.):

$$\begin{array}{lll} \text{g)} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}; \\ \text{j)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x); & \text{k)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}; & \text{l)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 1}{3^x + 2}; \\ \text{m)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}; & \text{n)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}; & \text{o)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right). \end{array}$$

6.2. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją granice:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sgn} x; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x^3}}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{sgn} [x(1 - x^2)]; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}. \end{array}$$

6.3. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równości:

$$\begin{array}{lll} \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2} = 0; & \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = 0; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 2} [x] \sin(x\pi) = 0; \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x} + \sin x}{2^{-x} + \cos x} = 1; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x^2} = 0; & \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x + \sin^2 x} = 0; \\ \text{h)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[3e^x] + 2}{[2e^x] + 1} = \frac{3}{2}; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \left| \frac{1}{x} \right| = 0; & \text{j)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \left(x + \frac{1}{x} \right) - \sin x \right] = 0. \end{array}$$

6.4. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić równości:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 + 1|}{[x]} = \infty; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \infty; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3 - \cos \frac{1}{x} \right) \operatorname{ctg} x = -\infty. \end{array}$$

6.5. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć granice:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}{\frac{x}{2}}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{x}; \\ \text{j)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{3^x}; & \text{k)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1}{4\sqrt{x} - 1}; & \text{l)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}; \\ \text{m)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)^{2x-1}; & \text{m)} \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \operatorname{tg}(2x)]^{\operatorname{ctg} x}; & \text{o)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[6]{1-x}}{x}. \end{array}$$

6.6. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}; & \text{b)} f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}; & \text{c)} f(x) = \frac{1-x^2}{x+1}; \\ \text{d)} f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}; & \text{e)} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}; & \text{f)} f(x) = \frac{1}{e^x - 1}; \\ \text{g)} f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}; & \text{h)} f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}; & \text{i)} f(x) = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x. \end{array}$$

Lista 7

7.1. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

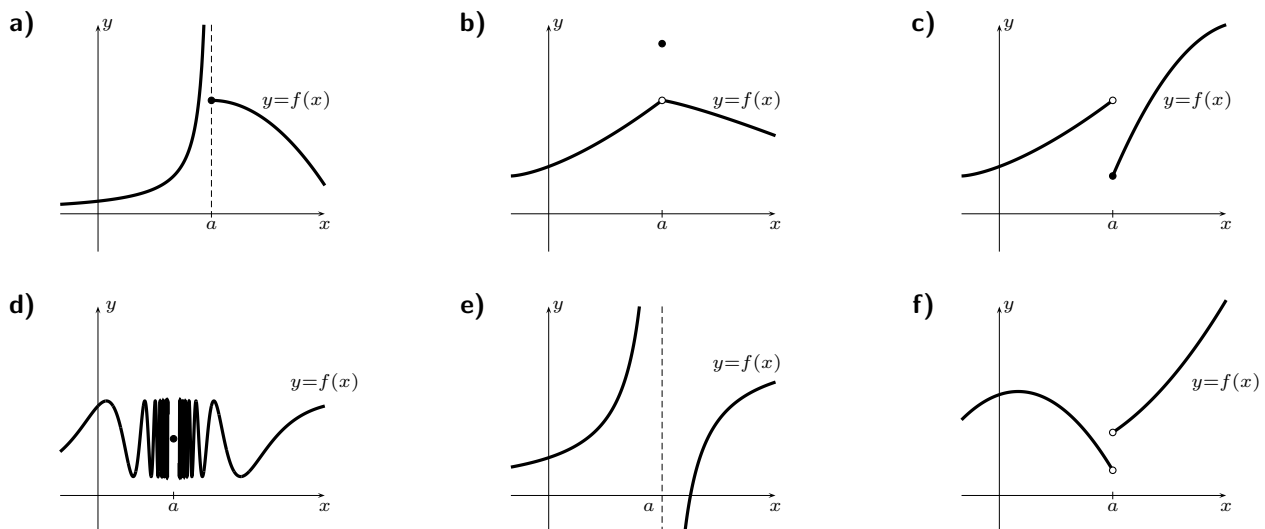
- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $f(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, funkcja f jest parzysta;
- c) prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$, prosta $y = x - 1$ asymptotą ukośną w ∞ , a prosta $x = 0$ jest jej asymptotą pionową obustronną;
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$;
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$;
- g) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, funkcja f jest okresowa i ma okres $T = 3$;
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, funkcja f jest nieparzysta.

Na rysunkach wskazać fragmenty wykresów spełniające poszczególne warunki.

7.2. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe na \mathbb{R} :

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} + 1 & \text{dla } x < -1, \\ b - 2x & \text{dla } x \geq -1; \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{dla } x < -1, \\ 2x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 + bx & \text{dla } x > 0; \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } |x| \geq \frac{\pi}{2}, \\ ax + b & \text{dla } |x| < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$
- d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{dla } |x| < 2, \\ x\sqrt{x^2 - 4} & \text{dla } |x| \geq 2; \end{cases}$
- e) $f(x) = \begin{cases} a \sin x + b \cos x & \text{dla } |x| > \frac{\pi}{4}, \\ 1 + \operatorname{tg} x & \text{dla } |x| \leq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$
- f) $f(x) = \begin{cases} bx & \text{dla } x < \pi, \\ \frac{\sin x}{ax} & \text{dla } x \geq \pi. \end{cases}$

7.3. Określić rodzaje nieciągłości funkcji w punkcie a (jeżeli istnieją) dla funkcji o podanych wykresach:



7.4. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić rodzaj tej nieciągłości:

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= \begin{cases} \frac{x+2}{x^2+x+2} & \text{dla } x \neq 1, 2 \\ 0 & \text{dla } x = 1, \\ 1 & \text{dla } x = 2; \end{cases} & \text{b)} f(x) &= \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases} & \text{c)} f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{dla } x = 1; \end{cases} \\ \text{d)} f(x) &= \begin{cases} \frac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases} & \text{e)} f(x) &= \operatorname{sgn} [x(x-1)]; & \text{f)} f(x) &= \begin{cases} 1 - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

7.5. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

$$\begin{aligned} \text{a)} x^3 + 6x - 2 = 0, [0, 1]; & \quad \text{b)} x \sin x = 7, \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]; & \quad \text{c)} 1 = \frac{\sin x}{2} + x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \text{d)} x^{100} + x - 1 = 0, \left[\frac{1}{2}, 1\right]; & \quad \text{e)} 3^x + x = 3, [0, 1]; & \quad \text{f)} x2^x = 1, [0, 1]. \end{aligned}$$

Wyznaczyć rozwiązania równania **a)** 0.125.

Lista 8

8.1. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów uzasadnić, że podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:

- a)** wśród stożków wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość;
b) wśród trójkątów prostokątnych wpisanych w koło o promieniu r istnieje ten, który ma największy obwód;
c) wśród prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku a istnieje ten, który ma największe pole (założyć, że dwa wierzchołki prostokąta należą do ustalonego boku trójkąta).

8.2. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= |x-1|, x_0 = 1; & \text{b)} f(x) &= 2x - |x|, x_0 = 0; & \text{c)} f(x) &= |x - \pi|^3 \sin x, x_0 = \pi; \\ \text{d)} f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 2, \\ 2^x & \text{dla } x > 2, \end{cases} & \text{e)} f(x) &= \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{dla } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} & \text{g)} f(x) &= \begin{cases} x^2 \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \\ x_0 &= 2; & x_0 &= \frac{\pi}{2}; & x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Naszkiecować wykresy funkcji **a)**, **b)**, **d)** i **e)**.

8.3. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= x^2 - 3x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}; & \text{b)} f(x) &= \frac{1}{x+1}, \text{ gdzie } x \neq -1; \\ \text{c)} f(x) &= \sqrt{x}, \text{ gdzie } x > 0; & \text{d)} f(x) &= \operatorname{tg} x, \text{ gdzie } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ dla } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

8.4. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= |x^2 - x|, x_0 = 1; & \text{b)} f(x) &= \sin x \cdot \operatorname{sgn}(x), x_0 = 0; \\ \text{c)} f(x) &= \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ \sin x & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases} x_0 = 0; & \text{d)} f(x) &= \begin{cases} \frac{x(x-1)}{2} & \text{dla } x < 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} x_0 = 1. \end{aligned}$$

Naszkiecować wykresy tych funkcji.

Lista 9

9.1. Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe w punkcie $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= 3 - \sqrt[5]{x}; & \text{b)} f(x) &= \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}; \\ \text{c)} f(x) &= \sqrt{|\sin x|}; & \text{d)} f(x) &= \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}. \end{aligned}$$

9.2. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}; & \text{b)} y = 3 \cos x + \operatorname{tg} x; & \text{c)} y = \frac{e^{x+1}}{\sin x}; \\ \text{d)} y = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) e^x; & \text{e)} y = (1 + \sqrt[4]{x}) \operatorname{tg}(\sqrt{x}); & \text{f)} y = e^x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; \\ \text{g)} y = \ln(\sin^2 x + 1); & \text{h)} y = \sqrt[3]{\operatorname{arc} \sin(x^2)}; & \text{i)} y = e^{e^x}; \\ \text{j)} y = \frac{2 \sin^2 x}{3 \cos^2 x}; & \text{k)} y = x^{\operatorname{tg} x}; & \text{l)} y = \sqrt{x}. \end{array}$$

9.3. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $f^{-1}(y_0)$, jeżeli:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = x + \ln x, \quad y_0 = e + 1; & \text{b)} f(x) = \cos x - 3x, \quad y_0 = 1; \\ \text{c)} f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}, \quad y_0 = 3; & \text{d)} f(x) = x^3 + 3^x, \quad y_0 = 4. \end{array}$$

9.4. Obliczyć f' , f'' , f''' funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x; & \text{b)} f(x) = x^3 - \frac{2}{x}; & \text{c)} f(x) = \frac{e^x}{x}; \\ \text{d)} f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; & \text{e)} f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x; & \text{f)} f(x) = x^3 \ln x. \end{array}$$

9.5. Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2}, \quad (1, f(1)); & \text{b)} f(x) = \ln(x^2 + e), \quad (0, f(0)); & \text{c)} f(x) = e^{\operatorname{tg} x}, \quad \left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right); \\ \text{d)} f(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad (3, f(3)); & \text{e)} f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad \left(\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)\right); & \text{f)} f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad (e, f(e)). \end{array}$$

Lista 10

10.1.

- a) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.
 b) Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z dodatnią częścią osi Ox .
 c) Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.
 d) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.
 e) Wyznaczyć równanie prostej, która jest wspólną styczną wykresów funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = (x - 2)^2 + 4$.

10.2.

a) Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} f(x) = x^2, g(x) = \sqrt[3]{x}, x > 0; & \text{ii)} f(x) = 4 - x, g(x) = 4 - \frac{x^2}{2}, x > 0; \\ \text{iii)} f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{x}, x > 0; & \text{iv)} f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \operatorname{ctg} x, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

b) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wykresy funkcji $y = e^{ax}$, $y = e^{-x}$ przetną się pod kątem prostym?

10.3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt[3]{7.999}; & \text{b)} \frac{1}{\sqrt{3.98}}; & \text{c)} \ln \frac{2001}{2000}; \\ \text{d)} \ln 0.9993; & \text{e)} e^{0.04}; & \text{f)} \operatorname{arc} \cos 0.499; \\ \text{g)} \frac{1}{\frac{1}{2} + \sin \frac{33\pi}{200}}; & \text{h)} \frac{2}{1 + e^{0.005}}; & \text{i)} \ln(0.2 + \sqrt{1 + 0.04}). \end{array}$$

10.4.

- a) Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku $b = 200$ m. Kąt przy wierzchołku tego trójkąta, zmierzony z dokładnością 0.01 rad wynosi $\frac{\pi}{3}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?
- b) Objętość kulki metalowej, wyznaczona z dokładnością 1 cm^3 , wynosi $36\pi \text{ cm}^3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnicę tej kuli?
- c) Do szybu puszczono swobodnie kamień i zmierzono czas jego spadania z dokładnością 0.1 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można wyznaczyć głębokość sztolni, jeżeli czas spadania kamienia wyniósł 4.1 s? Przyjąć $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.
- d) Średnica kuli zmierzona z dokładnością 0.1 mm wynosi 21.7 mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tej kuli?
- e) Przekątna sześcianu zmierzona z dokładnością 1 mm wynosi 14.3 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni całkowitej tego sześcianu?
- f) W biegu na 100 m czas mierzy się z dokładnością 0.01 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią prędkość zawodniczki, jeśli uzyskała ona czas 12.50 s?

10.5. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

- a) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$; b) $\ln \frac{y}{x} < y - x$ dla $1 \leq x < y$;
c) $x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \leq x < 1$; d) $e^x > ex$ dla $x > 1$.

Lista 11

11.1. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f , punktów x_0 oraz n :

- a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$; c) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$;
d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$; e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$; f) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 4$.

11.2. Napisać wzory Maclaurina z n -tą resztą Lagrange'a dla funkcji:

- a) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, R_n ; b) $f(x) = \operatorname{ch} x$, R_n ; c) $f(x) = \cos x$, R_n ; d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, R_n .

11.3. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

- a) $\operatorname{tg} x \approx x$, $|x| \leq \frac{\pi}{12}$; b) $\cos^2 x \approx 1 - x^2$, $|x| \leq 0.1$;
c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $|x| \leq 0.25$; d) $\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $|x| < 0.1$.

11.4. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

- a) $\frac{1}{e}$ z dokładnością 10^{-3} ; b) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3} ;
c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4} ; d) $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5} .

11.5. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi}{2}x}{\ln x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^2}$;
d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$; f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$;
g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$; h) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$;
j) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$; k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x$; l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$.

Lista 12

12.1. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

- a)** $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$; **b)** $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$; **c)** $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$;
d) $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$; **e)** $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$; **f)** $f(x) = xe^{-3x}$;
g) $f(x) = x \ln^2 x$; **h)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; **i)** $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

12.2. Uzasadnić tożsamości:

- a)** $\arctg x + \arctg x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$; **b)** $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \arctg x$ dla $x \in (-1, 1)$;
c) $\arctg x = \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1-x}{1+x}$ dla $x \in (-1, \infty)$; **d)** $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$.

12.3. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji:

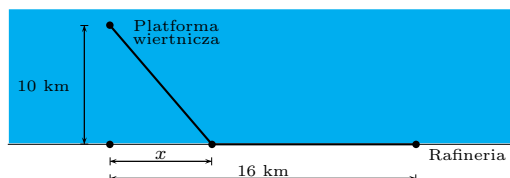
- a)** $f(x) = x^3 - 4x^2$; **b)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$; **c)** $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$;
d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$; **e)** $f(x) = x - \sqrt{x}$; **f)** $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$;
g) $f(x) = x \ln x$; **h)** $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$; **i)** $f(x) = 2 \arctg x - \ln(1 + x^2)$.

12.4. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

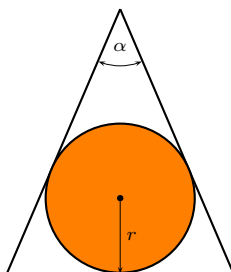
- a)** $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[1, 5]$; **b)** $v(x) = \arctg \frac{1-x}{1+x}$, $[0, 1]$;
c) $w(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $[-1, 4]$; **d)** $z(x) = 1 - |9 - x^2|$, $[-5, 1]$;
e) $g(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[0, 5]$; **f)** $h(x) = 2 \sin x + \sin 2x$, $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$.

Lista 13

13.1. a) Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od brzegu. Ropa z tej platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie – 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

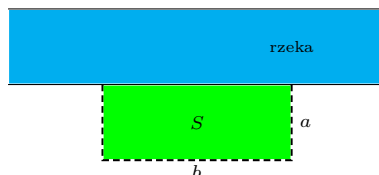


b) Jaka powinna być miara kąta α przy wierzchołku trójkąta równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?



c) Prostokątny kontener ma mieć pojemność 22.50 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania jego podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych – 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

d) Jakie powinny być wymiary a , b prostokątnego pola o powierzchni S , którego jednym naturalnym bokiem jest brzeg rzeki, aby na jego ogrodzenie zużyć jak najmniej siatki?



e) Odcinek o długości l podzielić na dwie części tak, aby suma pól kwadratów zbudowanych na tych częściach była najmniejsza.

13.2. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

- a) $f(x) = xe^{-x}$; b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 12}$; c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$;
d) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$; e) $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - 4 \ln|x|$; f) $f(x) = \sin x + \frac{1}{8} \sin 2x$;
g) $f(x) = e^{\arctg x}$; h) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

13.3. Z badać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

- a) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$; b) $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$; c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$;
d) $f(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$; e) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$; f) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Lista 14

14.1. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

- a) $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} - 2x\sqrt{x} \right) dx$; b) $\int \frac{(1 - x) dx}{1 - \sqrt[3]{x}}$; c) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$;
d) $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}$; e) $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx$; f) $\int \frac{2^x - 5^x}{10^x} dx$.

14.2. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

- a) $\int xe^{-3x} dx$; b) $\int x^2 2^x dx$; c) $\int \sqrt{x} \arctg \sqrt{x} dx$;
d) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; e) $\int x^2 \sin x dx$; f) $\int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{x + 1}}$;
g) $\int \ln(x + 1) dx$; h) $\int \arccos x dx$; i) $\int e^{2x} \sin x dx$;
j) $\int \sin x \sin 3x dx$; k) $\int \sin 3x \cos x dx$; l) $\int \cos x \cos 5x dx$.

14.3. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

- a) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; b) $\int \frac{\sqrt{1 + 4x}}{x} dx$; c) $\int (x + 1) \sin(x^2 + 2x + 2) dx$; d) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$;
e) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; f) $\int (5 - 3x)^{10} dx$; g) $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx$; h) $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}$;
i) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; j) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$; k) $\int \frac{5 \sin x dx}{3 - 2 \cos x}$; l) $\int x^3 e^{x^2} dx$.

14.4. Obliczyć całki nieoznaczone:

- a) $\int (|x| + 1) dx$; b) $\int \min\{x, x^2\} dx$; c) $\int |1 - x^2| dx$; d) $\int e^{|x|} dx$.

Lista 15

15.1. Obliczyć podane całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7}$; b) $\int \frac{dx}{x+5}$; c) $\int \frac{5 dx}{(2-7x)^3}$; d) $\int \frac{8 dx}{9x+20}$.

15.2. Obliczyć podane całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; b) $\int \frac{(6x+3) dx}{x^2+x+4}$; c) $\int \frac{(4x+2) dx}{x^2-10x+29}$;

d) $\int \frac{(x-1) dx}{9x^2+6x+2}$; e*) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}$; f*) $\int \frac{5 dx}{(x^2+2)^3}$.

15.3. Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{(x+2) dx}{x(x-2)}$; b) $\int \frac{x^2 dx}{x+1}$; c) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$; d) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

e) $\int \frac{(4x+1) dx}{2x^2+x+1}$; f) $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2-x+1}$; g) $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$; h) $\int \frac{2 dx}{x^2+6x+18}$;

i) $\int \frac{(5-4x) dx}{x^2-4x+20}$; j) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+2x+5}$; k) $\int \frac{x(x+2) dx}{x^2+2x+2}$; l) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$.

15.4. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \sin^3 x dx$; b) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$; c) $\int \cos^4 x dx$;

d) $\int \sin^3 x \cos^6 x dx$; e) $\int \cos^2 x \cos 2x dx$; f*) $\int \sin^2 2x \sin^2 x dx$.

15.5. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$; b) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} dx$; c) $\int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x}$;

d) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos x}$; e) $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{tg} x}$; f) $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}$;

g) $\int \frac{dx}{\cos x}$; h) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; i) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$.