Politechnika Wrocławska
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

KIERUNEK: Matematyka
SPECJALNOŚĆ: Matematyka teoretyczna

PRACA DYPLOMOWA

# Teoria potencjału $\alpha$-stabilnego ruchu Lévy'ego na fraktalach

**Kamil Kaleta**

PROWADZĄCY PRACĘ DYPLOMOWĄ:
**dr Mateusz Kwaśnicki**

Wrocław 2008

# Spis treści

# Wstęp

Obserwujemy obecnie bardzo duże zainteresowanie tematyką fraktali, zarówno w kontekście fizyki, jak i z punktu widzenia matematyki. Zapoczątkowane ponad dwadzieścia lat temu poszukiwania w dziedzinie analizy czy teorii prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych na przestrzeniach fraktalnych doprowadziły do niezwykle ciekawych i ważnych wyników, które nawiązują do teorii klasycznej, ale często zaskakują dodatkowymi trudnościami.

Duży wkład w rozwój analizy na fraktalach wniósł J. Kigami. W pracach [32]-[35] badał on tzw. operatory różnicowe na harmonicznych strukturach kratowych. Przez odpowiednie przejście graniczne Kigami skonstruował m.in. odpowiednik laplasjanu i pochodnej normalnej na fraktalach typu PCF, w szczególności na trójkącie Sierpińskiego. Wyniki te zostały zebrane w książce [36]. Prace [18, 27, 43, 44, 45] stanowiły kontynuację badań Kigamiego, wprowadzały odpowiedniki klasycznych pojęć i zagadnień takich jak równania różniczkowe, szeregi Taylora, funkcje sklejane (ang. *spline*) czy teoria spektralna.

Pod koniec lat 80. ubiegłego wieku skonstruowano proces dyfuzji na trójkącie i dywanie Sierpińskiego (np. [5, 6]). Dało to początek badaniom nad teorią procesów stochastycznych na fraktalach. Tak jak w przypadku klasycznym, od samego początku widoczne były silne związki pomiędzy analizą, a procesami stochastycznymi. Najlepiej widać to w pracach [2, 3], które stosują techniki probabilistyczne w teorii potencjału dla operatorów będących generatorami procesów dyfuzyjnych na trójkącie i dywanie Sierpińskiego.

W przypadku fraktali o strukturze tzw. $d$-zbioru (zob. def. 1) proces $\alpha$-stabilny został wprowadzony po raz pierwszy poprzez podporządkowanie fraktalnej dyfuzji (zob. def. 2) w pracy [41]. Wiele ważnych zagadnień z zakresu jego teorii potencjału omówionych zostało w pracy [14], która będzie stanowiła punkt wyjścia dla naszych dalszych rozważań.

Celem tej pracy jest udowodnienie brzegowej nierówności Harnacka (z ang. BHP) dla funkcji $\alpha$-harmonicznych na dowolnych otwartych podzbiorach trójkąta Sierpińskiego dla $\alpha \in (0, 1)$. Twierdzenie to orzeka, że jeśli $f$ i $g$ są funkcjami regularnie $\alpha$-harmonicznymi na dowolnym podzbiorze otwartym $D$ nieograniczonego trójkąta Sierpińskiego, zerującymi się na $B(v, r)\backslash D$, to dla dowolnych punktów $x, y \in D \cap B(v, \frac{r}{16})$ zachodzi nierówność $\frac{f(x)}{g(x)} \leq C\,\frac{f(y)}{g(y)}$.

Siła powyższej nierówności zależy od stałej $C$. W tej pracy otrzymujmy BHP ze stałą zależną wyłącznie od indeksu stabilnosci $\alpha \in (0, 1)$. Nie zależy ona oczywiście od rozpatrywanych funkcji. Co więcej brak też zależności od geometrii i spójności zbioru $D$. Dla rozpatrywanego przedziału parametru $\alpha$ jest to istotne uogólnienie jedynego wcześniejszego wyniku dotyczącego BHP dla funkcji $\alpha$-harmonicznych na trójkącie Sierpińskiego z pracy [14], gdzie rozważa się zbiory $D$ będące skończonymi sumami komórek dowolnego rozmiaru.

Prezentowana tu BHP jest odpowiednikiem równie ogólnego twierdzenia z brzegowej teorii potencjału ruchu stabilnego w $\mathbf{R}^N$ z pracy [13]. Mimo pewnych dodatkowych trudności natury analitycznej, których ominięcie wymaga zastosowania m.in. teorii funkcji sklejanych [45], schemat dowodu z pracy [13] można zaadaptować do przypadku trójkąta Sierpińskiego. Ten pomysł został wykorzystany w niniejszej pracy.

W pierwszym rozdziale wprowadzamy podstawowe pojęcia teorii potencjału ruchu stabilnego, które wykorzystane będą w dalszej części pracy.

Rozdział drugi zawiera dokładną konstrukcję i dyskusję własności nieograniczonego trójkąta Sierpińskiego, a także zarys analizy i teorii funkcji sklejanych. Przedstawiona jest konstrukcja pewnej kluczowej funkcji pomocniczej i dowody jej własności, które potrzebne są do dowodu BHP.

Główny wynik tej pracy wraz z rysem historycznym oraz dowodami pozostałych bardziej probabilistycznych lematów sformułowany został w rozdziale trzecim.

Ostatni rozdział, czwarty, nakreśla pewne możliwe drogi kontynuacji badań związane z tematyką pracy.

Pragnę bardzo serdecznie podziękować dr. Mateuszowi Kwaśnickiemu, pod kierunkiem którego została zrealizowana ta praca. Przede wszystkim za ogromną życzliwość, cierpliwość i wyrozumiałość, których doświadczyłem z Jego strony podczas naszej ponad dwuletniej współpracy, a także za tak duże poświęcenie i zaangażowanie w opiekę naukową nade mną. Dziękuję za całą przekazaną wiedzę, za wszystkie wskazówki, nieocenione pomysły i inspirację, bez których nie byłby możliwy mój udział w uzyskaniu prezentowanych wyników, a także za dobre słowo i wsparcie w trudniejszych momentach.

Dziękuję serdecznie prof. Tomaszowi Byczkowskiemu za wielką życzliwość i otwartość, a także za wszelką pomoc okazaną w okresie studiów.

Równie gorąco chciałbym podziękować dr. Andrzejowi Stósowi, za liczne wskazówki, cenne uwagi merytoryczne i konsultacje z zakresu teorii potencjału na fraktalach, które pomogły nadać pracy bardziej profesjonalny kształt.

# Rozdział 1

# Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale definiujemy $\alpha$-stabilny ruch Lévy'ego na przestrzeni fraktalnej oraz omawiamy podstawowe pojęcia jego teorii potencjału. Często odwołujemy się do monografii R. Blumenthala i R. Getoora [8] dotyczacej ogólnej teorii potencjału procesów Markowa. Przypadek procesów stabilnych w przestrzeniach euklidesowych badany był szczegolnie intensywnie przez ostatnich kilkanaście lat (m.in. [9]-[13] oraz [40]). Badania nad teorią potencjału ruchu stabilnego na fraktalach były zapoczątkowane i rozwijane przez A. Stósa w pracach [41, 42], a także [14]. Ponadto T. Kumagai wprowadził niezależnie procesy stabilne na fraktalach i wniósł istotny wkład w ich teorię potencjału [15, 37]. W nawiązaniu do pracy [14] wprowadzamy w tym rozdziale teorię dla tzw. $d$-zbiorów, do których w naturalny sposób zaliczają się takie fraktale jak trójkąt i dywan Sierpińskiego.

## 1.1 Pojęcia $d$-miary i $d$-zbioru. Miara i wymiar Hausdorffa

Niech $F$ oznacza niepusty domknięty podzbiór $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$. Przez $B_{\mathbf{R}^N}(x,r)$ oznaczmy kulę w $\mathbf{R}^N$ o środku w punkcie $x$ i promieniu $r$, a przez $\operatorname{diam} F$ średnicę zbioru $F$. Ustalmy $d \in (0, N]$.

**Definicja 1** *Dodatnią miarę borelowską $\mu$ na zbiorze $F$ nazywamy $d$-miarą jeśli istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$, dla których*

$$c_1 r^d \leq \mu(B_{\mathbf{R}^N}(x,r)) \leq c_2 r^d \tag{1.1}$$

*dla każdego $x \in F$ i $0 < r < \operatorname{diam} F$. Zbiór $F$ nazywamy $d$-zbiorem, jeśli jest on nośnikiem pewnej $d$-miary $\mu$.*

Każda $d$-miara jest regularną miarą borelowską, a dwie różne $d$-miary na tym samym $d$-zbiorze $F$ są równoważne.

Niech $A$ oznacza dowolny niepusty podzbiór borelowski $\mathbf{R}^N$. Definiujemy

$$H^\beta_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^\beta : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ \operatorname{diam}(U_i) \leq \delta \right\},$$

gdzie $\delta > 0$. Niech ponadto

$$H^\beta(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} H^\beta_\delta(A). \tag{1.2}$$

Powyższa granica istnieje, bowiem gdy $\delta$ maleje do zera, $H^\beta_\delta(A)$ rośnie. Funkcję $H^\beta(\cdot)$ nazywamy $\beta$-wymiarową miarą Hausdorffa [22, 23, 24]. Określamy także wymiar Hausdorffa zbioru $A$

$$\dim_H(A) = \inf \left\{ \beta : H^\beta(A) = 0 \right\} = \sup \left\{ \beta : H^\beta(A) = +\infty \right\}. \tag{1.3}$$

Można pokazać, że $d$-wymiarowa miara Hausdorffa obcięta do $d$-zbioru $F$ jest również $d$-miarą [29].

Do końca tego rozdziału zakładamy, że zbiór $F \subset \mathbf{R}^N$ jest łukowo spójnym $d$-zbiorem dla pewnego $d \in (0, N]$, a $\mu$ jest odpowiadającą mu $d$-miarą.

Dla $x, y \in F$ definiujemy

$$\rho_F(x,y) = \inf \left\{ L(\gamma) :\ \gamma : [0,1] \to F, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\},$$

gdzie $L(\gamma)$ oznacza długość łuku $\gamma$. Funkcja $\rho_F(\cdot,\cdot)$ jest metryką na zbiorze $F$ zwaną *geodezyjną* (ang. *geodesic metric* lub *intrinsic shortest path metric*, zob. [2]). Do końca tego rozdziału zakładamy, że jest ona lipschitzowsko równoważna standardowej metryce euklidesowej, którą oznaczamy przez $|x - y|$, dla $x, y \in F$.

Dla $x \in F$ oznaczmy $B(x,r) = B_{\mathbf{R}^N}(x,r) \cap F$. Niech $D^c = F \backslash D$ dla $D \subset F$.

Ustalmy następującą konwencję dotyczącą stałych. Zapis $c_i$ oznaczał będzie dodatnią stałą o numerze $i$, której wartość raz ustalona jest już niezmienna do końca pracy. Przez $C, C', ..., C^{(n)}$ oznaczać będziemy stałe pomocnicze występujące w dowodach, których wartości mogą się zmieniać w kolejnych rozumowaniach.

## 1.2 Fraktalna dyfuzja i $\alpha$-stabilny ruch Lévy'ego

**Definicja 2** *Proces Markowa $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ nazywamy fraktalną dyfuzją (ang. fractional diffusion) na $d$-zbiorze $F$ jeśli*

*(a) $Z$ jest dyfuzją fellerowską z przestrzenią stanów $F$ (zob.* [8]*),*

*(b) $Z$ ma symetryczną gęstość przejscia $q(t,x,y) = q(t,y,x)$, $t > 0$, $x,y \in F$ względem $d$-miary $\mu$, która jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych dla każdego $t > 0$ i spełnia*

$$c_3 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_4 \left(\frac{\rho_F(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\gamma}\right) \leq q(t,x,y) \leq c_5 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_6 \left(\frac{\rho_F(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\gamma}\right) \tag{1.4}$$

*dla pewnych stałych $c_3, ..., c_6 > 0$, $d_w > 1$, $d_s = 2d/d_w$, $\gamma = d_w/(d_w - 1)$ oraz dla wszystkich $x, y \in F$ i $t \in (0,T)$, gdzie $T = (\operatorname{diam} F)^{d_w}$.*

Gdy $\operatorname{diam} F = \infty$, kładziemy $T = \infty$. Stała $d_w$ (z ang. *walk dimension*) zależy wyłącznie od geometrii $d$-zbioru $F$, a stała $d_s$ jest nazywana jego wymiarem spektralnym. Jeśli na ustalonym $d$-zbiorze istnieje więcej niż jedna fraktalna dyfuzja, to każdej z nich odpowiada ta sama stała $d_w$ [39].

Dla przykładu, gdy przyjmiemy $F = \mathbf{R}^N$ (wtedy $\rho_F(x,y) = |x-y|$), to stała $d_w = 2$ i łatwo sprawdzić, że gęstość przejścia klasycznego ruchu Browna spełnia warunek (1.4).

Dzięki założeniu o lipschitzowskiej równoważności metryk, w nierówności (1.4) zamiast $\rho_F$ możemy wpisać odległość euklidesową i zmodyfikować stałe. Od tego miejsca, dla uproszczenia, posługujemy się już tylko metryką euklidesową. Ponadto w dalszej części pracy zakładamy, że $\operatorname{diam} F = \infty$, co oznacza, że rozważany $d$-zbiór $F$ jest nieograniczony.

Niech $\alpha \in (0, d_w)$. Załóżmy, że na $F$ istnieje zdefiniowana powyżej fraktalna dyfuzja $Z$ z gęstością przejscia $q(u, x, y)$ względem $d$-miary $\mu$. Niech $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ oznacza startujacy z zera ściśle $\alpha / d_w$-stabilny proces Lévy'ego na dodatniej półprostej rzeczywistej, niezależny od $Z$ (tzw. *subordynator*). Proces ten zadany jest przez transformatę Laplace'a $\mathbf{E} \exp(-uY_t) = \exp(-tu^{\alpha/d_w})$. Jego niezmienniczą na przesunięcia gęstość przejścia oznaczmy przez $\eta(t, u)$, $t, u > 0$ (więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w [7, rozdział 3] lub w [8, strona 219].

**Definicja 3** *Procesem $\alpha$-stabilnym lub $\alpha$-stabilnym ruchem Levy'ego na zbiorze $F$ nazywamy proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ zdefiniowany przez $X_t = Z_{Y_t}$.*

Proces $X$ nazywany jest *subordynowanym*. Dzięki niezależności $Z$ i $Y$ jego gęstość przejścia wyraża się wzorem

$$p(t, x, y) = \int_0^\infty q(u, x, y) \eta(t, u) du, \quad t > 0, \ x, y \in F. \tag{1.5}$$

Dla każdego $t > 0$ jest to symetryczna funkcja ciągła dwóch zmiennych na zbiorze $F \times F$.

Przez $E^x$ oznaczamy wartość oczekiwaną względem rozkładu $P^x$ procesu $X$ startującego z $x \in F$; w szczególności $P^x \{X_0 = x\} = 1$.

Proces $X$ posiada mocną własność Markowa. Jego trajektorie są prawostronnie ciągłe i mają lewostronne granice w każdym punkcie. Bardziej szczegółowe informacje o własnościach procesu subordynowanego w $\mathbf{R}^N$, z których większość przenosi się na nasz przypadek znaleźć można w [8, strona 18] lub w [25, rozdział 10].

Zachodzą następujące oszacowania dla funkcji $p(t, x, y)$ [14, Twierdzenie 3.1]:

$$p(t, x, y) \asymp \min\left(\frac{t}{|x - y|^{d+\alpha}}, t^{-d/\alpha}\right), \tag{1.6}$$

dla $t > 0$, $x, y \in F$, $x \neq y$. W szczególności

$$p(t, x, x) \asymp t^{-d/\alpha}.$$

Zapis $f(x) \asymp g(x)$ oznacza, że istnieje stała $C > 0$ zależna co najwyżej od $d$-zbioru $F$ oraz parametru stabilności $\alpha$ taka, że $C^{-1} g(x) \leq f(x) \leq C g(x)$ dla wszystkich $x \in F$.

**Uwaga**. W niniejszej pracy, przyjmujemy konwencję, że $0 < \alpha < d_w$. W pracy [14], do której bardzo często będziemy się odwoływać, jako zakres parametru stabilności ustalono przedział $(0, 2)$. Zatem, jeśli $\alpha'$ oznacza indeks stabilności z pracy [14], to $\alpha = (2/d_w)\alpha'$ jest parametrem z naszego zakresu.

Dla funkcji $f \in C_0(F)$ definiujemy *półgrupę operatorów przejścia*

$$P_t f(x) = \int_F f(y)p(t, x, y)d\mu(y). \tag{1.7}$$

Dzięki (1.6) nietrudno sprawdzić, że $P_t(C_0(F)) \subset C_0(F)$ i jest to mocno ciągła półgrupa operatorów markowskich na $C_0(F)$.

**Definicja 4** *Generatorem infinitezymalnym półgrupy operatorów przejścia $P_t$ nazywamy operator zdefiniowany wzorem*

$$\Delta^{\alpha/d_w} f(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \tag{1.8}$$

*dla wszystkich funkcji $f \in C_0(F)$, dla których granica istnieje w normie supremum. Zbiór wszystkich takich funkcji nazywamy dziedziną generatora $\Delta^{\alpha/d_w}$ i oznaczamy przez $\mathcal{D}(\Delta^{\alpha/d_w})$.*

## 1.3 Proces zabity i funkcja Greena

Niech $D$ będzie ograniczonym podzbiorem otwartym $F$. Określamy czas pierwszego wyjścia procesu $X$ ze zbioru $D$ wzorem $\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \in D^c\}$. Zmienna losowa $\tau_D$ jest prawie na pewno skończonym momentem Markowa.

Przez $X^D = (X_t^D)_{t>0}$ oznaczmy proces $X$ zabity w chwili wyjścia ze zbioru $D$ (zob. [8]), tj.

$$X_t^D = \begin{cases} X_t & \text{dla} \quad 0 < t < \tau_D \\ \partial & \text{dla} \quad t \geq \tau_D. \end{cases}$$

$\partial$ oznacza dodatkowy stan procesu, często nazywany „cmentarzem". Od chwili $\tau_D$ proces $X^D$ pozostaje na zawsze w $\partial$.

Istnieje gęstość przejścia $p^D(t, x, y)$ procesu $X^D$ (por. [16]), tzn.

$$E^x[f(X_t) : t < \tau_D] = \int_D f(y)p^D(t, x, y)d\mu(y)$$

dla każdej nieujemnej lub ograniczonej funkcji borelowskiej $f$ na $F$. Funkcja $p^D(t,x,y)$ posiada następujace własności (zob. [14, Proposition 5.1]):

(a) $p^D(t,x,y)$ jest ciągła względem $(x,y) \in D \times D$, dla każdego $t > 0$,

(b) $p^D(t,x,y) = p^D(t,y,x)$, $x, y \in D$, $t > 0$,

(c) $p^D(t,x,y) = p(t,x,y) - E^x[p(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y); t > \tau_D]$, $x, y \in F$, $t > 0$,

(d) $p^D(t,x,y) > 0$, $x, y \in D$, $t > 0$,

(e) $p^D(t,x,y) = 0$, $x \in \mathrm{Int}(D^c)$ lub $y \in \mathrm{Int}(D^c)$, $t > 0$,

(f) $p^D(t,x,y) = \int_F p^D(s,x,z)p^D(t-s,z,y)d\mu(z)$, $x, y \in F$, $t > s > 0$.

**Definicja 5** *Funkcję Greena zbioru $D$ definiujemy wzorem*

$$G_D(x,y) = \int_0^\infty p^D(t,x,y)dt, \quad x, y \in F.$$

Z własności $p^D(t,x,y)$ wynika, że $G_D(x,y)$ jest symetryczną (tzn. $G_D(x,y) = G_D(y,x)$) funkcją ciągłą na $D \times D$ przyjmującą wartości z przedziału $[0,\infty]$, zerującą się w przypadku, gdy choć jeden z argumentów należy do $D^c$ [14]. Ponadto dla $\alpha \le d$ oraz $x \in D$, $G_D(x,x) = \infty$ oraz $G_D(x,y) < \infty$ dla $x \neq y$.

**Definicja 6** *Dla $\alpha < d$ definiujemy jądro potencjału procesu $X$*

$$K_\alpha(x,y) = \int_0^\infty p(t,x,y)dt, \quad x, y \in F.$$

Konsekwencją oszacowań (1.6) jest zależność asymptotyczna

$$K_\alpha(x,y) \asymp |x-y|^{-d+\alpha}.$$

Całkując tożsamość (c), z twierdzenia Fubiniego natychmiast dostajemy, że dla $\alpha < d$ poza zbiorem $\{(x,y) : x = y \in D^c\}$ zachodzi równość

$$G_D(x,y) = K_\alpha(x,y) - E^x K_\alpha(X_{\tau_D}, y).$$

Można pokazać, że $\int G_D(x,y)f(y)d\mu(y) = E^x \int_0^{\tau_D} f(X_t)dt$ dla każdej mierzalnej i ograniczonej funkcji $f$. Stąd $\int G_D(x,y)d\mu(y) = E^x\tau_D$.

Istnieje stała $c_7 = c_7(\alpha, F)$ taka, że dla każdego $x \in F$, $r > 0$ zachodzi [14, Proposition 4.4]

$$\sup_{y \in B(x,r)} E^y \tau_{B(x,r)} \leq c_7 r^\alpha. \tag{1.9}$$

Jeśli $U \subset D$, to z mocnej własności Markowa procesu $X$ wynika, że

$$E^x \tau_D = E^x \tau_U - E^x(E^{X_{\tau_U}} \tau_D), \quad x \in F. \tag{1.10}$$

Dla $f \in \mathcal{D}(\Delta^{\alpha/d_w})$ i $x \in D$ zachodzi

$$E^x f(X_{\tau_D}) - f(x) = E^x \int_0^{\tau_D} \Delta^{\alpha/d_w}(X_t) dt. \tag{1.11}$$

Jest to tzw. wzór Dynkina [20, wzór 5.8].

## 1.4 Miara $\alpha$-harmoniczna i jądro Poissona

**Definicja 7** *Dla dowolnego otwartego i ograniczonego zbioru $D \subseteq F$ i borelowskiego zbioru $E \subseteq F$ oraz dla dowolnego $x \in F$ definiujemy miarę $\alpha$-harmoniczną $\omega_D^x$ zbioru $E$ (ang. $\alpha$-harmonic measure of the set $E$ relative to $D$ and $x$) wzorem*

$$\omega_D^x(E) = P^x \{X_{\tau_D} \in E\}.$$

Tak zdefiniowana miara jest oczywiście miarą probabilistyczną na $D^c$.

Klasyczne pojęcie miary harmonicznej odnosi się do ruchu Browna. Ciągłość jego trajektorii powoduje, że miara harmoniczna zbioru $D$ skupiona jest na brzegu $\partial D$. W przypadku procesu skokowego $X$, dla dowolnego $x \in D$ miara $\alpha$-harmoniczna $\omega_D^x$ nie jest niesiona przez brzeg i jest dodatnia na każdym otwartym podzbiorze $D^c$.

Dla każdego $x \in \overline{D}^c$ zachodzi $P^x \{X_{\tau_D} = x\} = 1$ gdyż $P^x \{\tau_D = 0\} = 1$. Oznacza to, że $\omega_D^x$ jest miarą atomową skupioną w całości w pukcie $x$. Nie musi tak być jednak dla wszystkich punktów z brzegu zbioru $D$. Jeśli $P^x \{\tau_D > 0\} > 0$ dla $x \in \partial D$, to miara $\omega_D^x$ nie jest skupiona w $x$ i punkt $x$ nazywamy nieregularnym dla $D$.

Jeśli $D$ jest otwartym niepustym podzbiorem ograniczonym $F$, a $E$ jest dowolnym podzbiorem borelowskim $F$ spełniającym warunek $\mathrm{dist}(E, D) > 0$, to (zob.

[14, Wniosek 6.2])

$$P^x\left\{X_{\tau_D} \in E\right\} \asymp \int_D \int_E \frac{G_D(x,y)}{|y-z|^{d+\alpha}} d\mu(z) d\mu(y). \tag{1.12}$$

Wobec powyższego rozkład $X_{\tau_D}$ jest absolutnie ciągły względem $d$-miary $\mu$ na $\mathrm{Int}\,(D^c)$. Gęstość miary $\omega_D^x$ względem $\mu$ nazywamy *jądrem Poisssona* i oznaczamy przez $P_D(x,y)$. Dla $y \in D$ określamy $P_D(x,y) = 0$. Wiadomo, że dla $\alpha \neq d$ funkcja $P_D(x,y)$ jest ciągła na $D \times \mathrm{Int}(D^c)$ [14, Proposition 6.3]. Założenie $\mathrm{dist}(E,D) > 0$ jest tutaj istotne, gdyż ogólnie miara $\alpha$-harmoniczna $\omega_D^x$ może zawierać składową singularną do $\mu$.

Jeśli $\omega_D^x(\partial D) = 0$ (wtedy mówimy, że proces $X$ nie uderza w brzeg zbioru $\partial D$ w momencie wyjścia ze zbioru $D$), to dla każdej nieujemnej funkcji borelowskiej $f$ na $F$ zachodzi równość

$$E^x f(X_{\tau_D}) = \int_{D^c} P_D(x,y) f(y) d\mu(y).$$

W teorii potencjału procesów stabilnych w przestrzeniach euklidesowych znane są jawne wzory na $P_D(x,y)$ w przypadku gdy $D$ jest kulą lub półprzestrzenią. W ogólnym przypadku przestrzeni o strukturze $d$-zbioru takie wzory nie istnieją. Znane są jednak częściowe wyniki dotyczące uderzania w brzeg pewnych specjalnie wybranych kul w przypadku tranzytywnym, tzn. gdy $\alpha \in (0,d)$.

Ustalmy $v \in F$ oraz $r > 0$. Niech $z \in B_{\mathbf{R}^N}(v, r/2)$ i $s \in (r, 2r)$. Oznaczmy

$$K(z,s) = B_{\mathbf{R}^N}\left(\frac{z(s-r)+v(2r-s)}{r}, \frac{s+r}{2}\right) \cap F. \tag{1.13}$$

Zauważmy, że dla $y \in B(v,r)$

$$\begin{aligned} |y - \frac{z(s-r)+v(2r-s)}{r}| &\leq |y-v| + |z-v| \cdot \frac{s-r}{r} \\ &\leq r + \frac{s-r}{2} = \frac{s+r}{2} \end{aligned}$$

oraz dla $y \in K(z,s)$

$$\begin{aligned} |y-v| &\leq |\frac{z(s-r)}{2} + \frac{v(2r-s)}{r} - v| + |\frac{z(s-r)}{2} + \frac{(2r-s)}{r} - y| \\ &\leq \frac{s-r}{2} + \frac{s+r}{2} = s. \end{aligned}$$

Stąd $B(v,r) \subseteq K(z,s) \subseteq B(v,s)$.

**Fakt 1** *([14, Lemat 7.5]) Niech $\alpha < 1$. Istnieje $z_0 \in B_{\mathbf{R}^N}(v, r/2)$ (niekoniecznie ze zbioru $F$) taki, że dla dla prawie wszystkich $s \in (r, 2r)$ proces $X$ nie uderza w brzeg $K(z_0, s)$.*

W szczególności dla $\alpha < 1$ proces $X$ nie uderza w brzeg zbioru $K(z_0, s)$ w chwili wyjścia z niego. Zatem w tym przypadku dla dowolnego borelowskiego $E \in K(z_0, s)^c$ mamy $P^x \left\{ X_{\tau_{K(z_0,s)}} \in E \right\} = \int_E P_{K(z_0,s)}(x, y) d\mu(y)$. Będziemy korzystali z tego faktu w dalszej części pracy.

## 1.5 Funkcje $\alpha$-harmoniczne

**Definicja 8** *Mówimy, że nieujemna i $\mu$-prawie wszędzie skończona funkcja borelowska $f$ na $F$ jest $\alpha$-harmoniczna na otwartym i ograniczonym zbiorze $D \subseteq F$, jeśli*

$$f(x) = E^x f(X_{\tau_E}), \quad x \in E,$$

*dla każdego zbioru otwartego $E$ takiego, że $\overline{E} \subset D$. Jeśli dodatkowo $f(x) = 0$ dla $x \in D^c$, to $f$ jest funkcją singularnie $\alpha$-harmoniczną. Jeżeli*

$$f(x) = E^x f(X_{\tau_D}), \quad x \in D,$$

*funkcję $f$ nazywamy regularnie $\alpha$-harmoniczną na $D$.*

Mocna własność Markowa procesu $X$ powoduje, że każda funkcja regularnie $\alpha$-harmoniczna jest również $\alpha$-harmoniczna.

Zauważmy, że jeśli $f_0$ jest funkcją nieujemną określoną na $D^c$, to funkcja dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} E^x f_0(X_{\tau_D}) & \text{dla} \quad x \in D \\ f_0(x) & \text{dla} \quad x \in D^c \end{cases}$$

o ile nie jest stale nieskończona na $D$, jest na tym zbiorze regularnie $\alpha$-harmoniczna. Tym, co odróżnia funkcje $\alpha$-harmoniczne od klasycznych funkcji harmonicznych związanych z ruchem Browna jest fakt, że muszą one być określone na całej przestrzeni, w naszej sytuacji na całym $d$-zbiorze $F$, a nie tylko na zbiorze $D$.

Przykładem funkcji $\alpha$-harmonicznej jest funkcja Greena zbioru $D$. Jeśli $D$ jest otwartym i ograniczonym podzbiorem $F$, to dla $\alpha \neq d$ i dla każdego $y \in D$ funkcja $G_D(\cdot, y)$ jest $\alpha$-harmoniczna na $D \setminus \{y\}$ [14, Proposition 5.7].

# Rozdział 2

# Trójkąt Sierpińskiego

## 2.1 Konstrukcja i własności nieograniczonego trójkąta Sierpińskiego. Miara Hausdorffa

W tym podrozdziale, wzorując się na konstrukcjach przeprowadzonych w pracach [6, 27], skonstruujemy najpierw ograniczony (standardowy) trójkąt Sierpińskiego, a następnie jego wersję nieograniczoną i omówimy niektóre jego własności.

Niech $K_0$ oznacza domknięty trójkąt w $\mathbf{R}^2$ o wierzchołkach w punktach $(0,0),(1,0)$ oraz $(1/2,\sqrt{3}/2)$. Oznaczmy przez $K_1$ zbiór powstały przez usunięcie z $K_0$ wnętrza trójkąta, którego wierzchołki stanowią punkty leżące na środkach krawędzi $K_0$. Zbiór $K_1$ składa się z trzech trójkątów o krawędziach długości $1/2$. Poprzez ponowne zastosowanie powyższej procedury do każdego z nich otrzymujemy zbiór $K_2$, składający się z dziewięciu trójkątów o krawędziach długości $1/4$. Kontynuując tę procedurę, otrzymujemy ciąg zbiorów $K_n$, składających się z $3^n$ domkniętych trójkątów o krawędziach długości $1/2^n$, które mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

**Definicja 9** *Ograniczonym (standardowym) trójkątem Sierpińskiego nazywamy zbiór* $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. *Oznaczamy go przez* $F^+$.

Oznaczmy przez $\mathcal{S}_n^+$ rodzinę $3^n$ komórek powstałych z przekroju $F^+$ z trójkątami o krawędzi długości $1/2^n$, tworzącymi $K_n$, a przez $\mathcal{V}_n^+$ zbiór wszystkich wierzchołków tych trójkątów. Oczywiście

$$\mathcal{V}_0^+ = \left\{(0,0),(1,0),(1/2,\sqrt{3}/2)\right\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{V}_n^+ \subset \mathcal{V}_{n+1}^+ \quad \text{dla} \quad n \geq 0.$$

Przedstawiona powyżej konstrukcja ma charakter topologiczny. Możliwe jest też otrzymanie zbioru $F^+$ w inny sposób. Łącząc krawędziami wierzchołki ze zbioru $\mathcal{V}_n^+$ odległe o $\frac{1}{2^n}$, otrzymujemy graf $G_n^+$ przybliżający trójkąt Sierpińskiego $F^+$ (ang. *pre-gasket*). Zbiór $\mathcal{V}_{n+1}^+$ jest sumą $\mathcal{V}_n^+$ i środków krawędzi grafu $G_n^+$. Ponadto $F^+ = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n^+}$.

Przeprowadzając analogiczną konstrukcję dla trójkąta $K_0$ o wierzchołkach w punktach $(0,0),(-1,0)$ oraz $(-1/2,\sqrt{3}/2)$, otrzymujemy zbiór $F^-$, będący obrazem ograniczonego trójkąta Sierpińskiego przez symetrię względem prostej o równaniu $x=0$. Podobnie jak dla zbioru $F^+$ oznaczmy przez $\mathcal{S}_n^-$ i $\mathcal{V}_n^-$ odpowiednio rodziny komórek i wierzchołków związanych ze zbiorem $F^-$. Niech

$$F^0 = F^+ \cup F^-, \ \mathcal{S}_n^0 = \mathcal{S}_n^+ \cup \mathcal{S}_n^- \quad \text{oraz} \quad \mathcal{V}_n^0 = \mathcal{V}_n^+ \cup \mathcal{V}_n^-.$$

Poprzez odpowiednie skalowanie zbioru $F^0$ łatwo dostajemy trójkąt nieograniczony. Niech

$$F^n = 2^n F^0, \ \ n = 0,1,2,....$$

**Definicja 10** *Nieograniczonym trójkątem Sierpińskiego nazywamy zbiór* $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^n$. *Oznaczamy go przez* $F$.

Dla $m \in \mathbf{Z}$ oraz $n \geq -m$ określamy

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{V}_m^n = 2^n \mathcal{V}_{m+n}^0 & \multirow{2}{*}{oraz} & \mathcal{V}_m = \bigcup_{n=-m}^{\infty} \mathcal{V}_m^n \\ \mathcal{S}_m^n = 2^n \mathcal{S}_{m+n}^0 & & \mathcal{S}_m = \bigcup_{n=-m}^{\infty} \mathcal{S}_m^n. \end{array}$$

Jeśli $S \in \mathcal{S}_m$ jest komórką o wierzchołkach brzegowych $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}_m$, to piszemy $S = S(v_1, v_2, v_3)$. Komórki z rodziny $\mathcal{S}_m$ nazywamy komórkami rozmiaru $2^{-m}$. Dwie komórki jednakowego rozmiaru nazywane są sąsiednimi, jeśli ich przekrój składa się dokładnie z jednego punktu.

Jeśli $K$ jest dowolną komórką z rodziny $\mathcal{S}_0$, to określamy $\mathcal{S}_m^K = \{S \in \mathcal{S}_m : S \subset K\}$ oraz $\mathcal{V}_m^K = \mathcal{V}_m \cap K$. Dla $x \in \mathcal{V}_m^K$, $m \in \mathbf{Z}$ przez $\mathcal{V}_{m,x}^K$ oznaczamy zbiór wierzchołków należących do $K$ sąsiednich do $x$ w $m$-tym kroku konstrukcji.

Trójkąt Sierpińskiego $F$ dziedziczy topologię z $\mathbf{R}^2$. Domknięcie, wnętrze i brzeg dowolnego podzbioru zbioru $F$ rozpatrujemy w tej topologii. Wszystkie komórki z rodziny $\mathcal{S}_m$ są zbiorami domkniętymi, a każde dwie sąsiednie komórki tworzą zbiór spójny (a nawet łukowo spójny). Sam zbiór $F$ jest domknięty i łukowo spójny w $\mathbf{R}^2$. Przez $B(v,r)$ oznaczamy kulę w $F$ o środku w punkcie $v \in F$ i promieniu $r > 0$. Jeśli $v \in \mathcal{V}_m$ jest punktem łączącym dwie sąsiednie komórki $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_m$, to stosujemy oznaczenie $B_m(v) = \mathrm{Int}(S_1 \cup S_2)$. W sensie geometrycznym zbiór $B_m(v)$ pełni w przypadku trójkąta Sierpińskiego podobną rolę jak kula euklidesowa w $\mathbf{R}^N$. Zauważmy, że $B(v, 2^{-n})$ zawiera zbiór $B_n(v)$, zaś dla każdego $k > n$ mamy $B(v, 2^{-k}) = B_k(v)$. W szczególności $\mathrm{Int}(F^n) = B(0, 2^{-n}) = B_n(0)$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$.

Trójkąt Sierpińskiego jest zbiorem samopodobnym o wymiarze Hausdorffa (1.3) równym $d = \log 3/\log 2$. Samopodobieństwo oznacza, że każde dwie komórki (dowolnego rozmiaru) są figurami podobnymi. Ponadto dla każdego otwartego podzbioru $D \subset F$ takiego, że $\operatorname{diam} D < 1/2$, istnieje zbiór $\tilde{D} \subset F^+$ izometryczny z $D$ (zbiór $F^+$ można zastąpić dowolną inną komórką z $\mathcal{S}_0$). Zbiór $F$ jest niezmienniczy na jednokładność o środku w punkcie $(0,0)$ w skali będącej całkowitą potęgą liczby 2. Dzięki tym własnościom, często wystarczy badać tylko podzbiory ograniczonego trójkąta $F^+$.

Oznaczmy przez $\mu$ $d$-wymiarową miarę Hausdorffa na $F$ unormowaną w taki sposób, aby miara dowolnej komórki rozmiaru 1 była równa 1. W szczególności $\mu(F^+) = 1$. Taką miarę można wprowadzić na $F$ w sposób mniej abstrakcyjny niż (1.2), poprzez granicę ciągu pewnych miar w sensie zbieżności całek z funkcji z $C_c(F)$ wzgledem tych miar (ang. *vague limit*). Jeden taki ciąg, który nie będzie przez nas wykorzystywany, określa się przez obcięcie dwuwymiarowej miary Lebesgue'a do zbioru powstałego w $n$-tym kroku konstrukcji i odpowiednie skalowanie (por. [2]). Drugim, bardziej użytecznym z punktu widzenia naszej analizy na trójkącie, jest ciąg miar dyskretnych na zbiorze wierzchołków. Oznaczmy

$$\mu_m = \frac{2}{3^{m+1}} \sum_{p \in \mathcal{V}_m} \delta_p, \quad m = 0, 1, ...$$

gdzie $\delta_p$ oznacza deltę Diraca w punkcie $p$. Miarę $\mu$ definiujemy jako [27]

$$\int_F f(x) d\mu(x) = \lim_{m\to\infty} \int_F f(x) \mu_m(x), \quad f \in C_c(F).$$

Przez $L^1(E)$, $E \subseteq F$ oznaczamy przestrzeń funkcji, których moduł całkowalny jest na zbiorze $E$ względem miary $\mu$, a przez $L^2(E)$ przestrzeń funkcji całkowalnych na zbiorze $E$ względem miary $\mu$ w drugiej potędze.

**Fakt 2** *(Własności miary $\mu$)*

*(a) Miara $\mu$ jest $d$-miarą na zbiorze $F$.*

*(b) Dla każdej komórki $K \in \mathcal{S}_0$ zachodzi $\mu(K) = 1$.*

DOWÓD: Zauważmy najpierw, że miary $\mu_m$ rozłożone są punktowo w wierzchołkach z $\mathcal{V}_m$ i nietrudno sprawdzić indukcyjnie, że liczność zbioru wszystkich wierzchołków pozostających w obrębie dowolnej komórki z rodziny $\mathcal{S}_0$ wynosi $\frac{3^{m+1}+3}{2}$. Zatem miara $\mu_m$ dowolnej komórki z rodziny $\mathcal{S}_0$ w $m$-tym kroku konstrukcji wynosi $\frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{3^{m+1}+3}{2}$, a miara wnętrza takiej komórku to $\frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{3^{m+1}-3}{2}$.

Dla dowodu punktu (a) należy pokazać, że istnieją stałe $c_1$ i $c_2$, z którymi miara $\mu$ spełnia nierówności (1.1). Niech $x \in F$. Jeśli $r > 0$, to dla pewnego $n \in \mathbf{Z}$ zachodzi $2^n < r \leq 2^{n+1}$. Łatwo widać, że kula $B(x,r)$ ma punkty wspólne co najwyżej z sześcioma komórkami z rodziny $\mathcal{S}_{-n-1}$. Wybierzmy ciąg funkcji $g_i \in C_c(F)$ o nośnikach zawartych w sumie tych sześciu komórek takich, że $g_i \to \chi_{B(x,r)}$ w $L^1(F)$ i $\|g_i\|_\infty \leq 1$ dla każdego $i \in \mathbf{N}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\int_F g_i(y)d\mu_m(y) &\leq \|g_i\|_\infty 6 \cdot 3^{n+1} \cdot \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{3^{m+1}+3}{2} \leq 18 \cdot 3^n \cdot \frac{3^{m+1}+3}{3^{m+1}} \\ &= 18 \cdot (2^n)^d \cdot \frac{3^{m+1}+3}{3^{m+1}} \leq 18 \cdot r^d \cdot \frac{3^{m+1}+3}{3^{m+1}},\end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $m = 0, 1, 2, \ldots$. Zauważmy również, że skoro $r > 2^n$ to kula $B(x,r)$ musi zawierać przynajmniej jedną komórkę z rodziny $\mathcal{S}_{-n}$. Niech teraz ciąg funkcji $g_i \in C_c(F)$ aproksymujacych $\chi_{B(x,r)}$ w $L^1(F)$ spełnia warunek, że $g_i(y) \geq \chi_{B(x,r)}(y)$ dla każdego $i \in \mathbf{N}$ i $y \in F$. Mamy

$$\begin{aligned}\int_F g_i(y)d\mu_m(y) &\geq \int_F \chi_{B(x,r)}(y)d\mu_m(y) = \mu_m(B(x,r)) \\ &\geq 3^n \cdot \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{3^{m+1}-3}{2} = 3^{-1} \cdot 3^{n+1} \cdot \frac{3^{m+1}-3}{3^{m+1}} \\ &= 3^{-1} \cdot (2^{n+1})^d \cdot \frac{3^{m+1}-3}{3^{m+1}} \geq 3^{-1} \cdot r^d \cdot \frac{3^{m+1}-3}{3^{m+1}},\end{aligned} \tag{2.2}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$. Jeśli $n > 0$, to komórka rozmiaru $2^n$ składa się z $3^n$ komórek rozmiaru 1. Mogą one posiadać parami wspólne punkty brzegowe. Uwzględniając to, w powyższym wzorze rozpatrujemy tylko miary $\mu_m$ wnętrz tych komórek. Przechodząc do granicy przy $m \to \infty$, a następnie przy $i \to \infty$ w (2.1) i (2.2) otrzymujemy żądane nierówności dla miary $\mu$.

Dla uzasadnienia punktu (b) podobnie jak w punkcie (a) wystarczy wybrać odpowiedni ciąg funkcji z $C_c(F)$ aproksymujący funkcję $\chi_K$ w $L^1(F)$. $\square$

Jeśli $K$ jest dowolną komórką z rodziny $\mathcal{S}_0$, to miarę probabilistyczną powstałą z obcięcia standardowej miary $\mu$ do komórki $K$ oznaczamy przez $\mu_K$.

Struktura geometryczna zbioru $F$ niesie ze sobą tzw. własności skalowania. Zdefiniujmy operatory dylatacji funkcji. Dla funkcji $f$ i $n = 0, 1, 2, \ldots$ niech

$$(\sigma_n f)(x) = f(2^n x).$$

**Fakt 3** *Niech $E \subset F^k$ dla pewnego $k \in \mathbf{N}$ i niech $f \in L^1(E)$. Wówczas zachodzi następujaca własność skalowania*

$$\int_E f(x)d\mu(x) = 3^n \int_{2^{-n}E} (\sigma_n f)(x)d\mu(x), \quad n \in \mathbf{N}. \tag{2.3}$$

DOWÓD: Dla $m = 0, 1, 2, \ldots$ i dla funkcji $g \in C_c(F^k)$ wprost z definicji miary $\mu$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{2}{3^{m+1}} \sum_{y \in \mathcal{V}_m^k} g(y) &= \frac{2}{3^{m+1}} \sum_{2^n x \in \mathcal{V}_m^k} g(2^n x) \\ &= \frac{2}{3^{m+1}} \sum_{x \in 2^{-n}\mathcal{V}_m^k} (\sigma_n g)(x) \\ &= 3^n \cdot \frac{2}{3^{m+n+1}} \sum_{x \in \mathcal{V}_{m+n}^{\max(0,k-n)}} (\sigma_n g)(x). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $m \to \infty$ po obu stronach powyższej równości otrzymujemy (2.3) dla funkcji $g$ i $E \supseteq \mathrm{supp}(g)$. Dla dowodu (2.3) w ogólnym przypadku wystarczy wybrać ciąg funkcji $g_i \in C_c(F^k)$ zbieżny do $f\chi_E$ w $L^1(F)$. $\square$

## 2.2 Analiza na trójkącie. Laplasjan Kigamiego, pochodna normalna i forma Dirichleta. Funkcje harmoniczne

Jun Kigami wprowadził i rozwinął teorię laplasjanu i funkcji harmonicznych na ograniczonej wersji trójkąta (zob. [32]-[36]). We współczesnych pracach analiza rozwijana jest też głównie dla wersji ograniczonej trójkąta. Na przykład, kluczowa z naszego punktu widzenia teoria funkcji sklejanych [45], wprowadzona została dla zbioru ograniczonego. Dla wygody, w pierwszej części tego podrozdziału, również omawiamy analizę dla wersji ograniczonej trójkąta Sierpińskiego. Rozważamyy dowolną komórkę $K \in \mathcal{S}_0$; jak już zauważyliśmy, $K$ jest izometryczna z $F^+$.

Zwróćmy uwagę na to, że obiekty, które za moment wprowadzimy, czyli laplasjan Kigamiego, pochodna normalna oraz forma Dirichleta, mają charakter lokalny i dzięki temu łatwo je rozszerzyć na cały zbiór $F$. W drugiej części podrozdziału omawiamy to rozszerzenie.

Funkcje harmoniczne w teorii laplasjanu Kigamiego charakteryzowane są przez tzw. własność średniej: wartość funkcji w każdym wierzchołku $x \in \mathcal{V}_m^K$, $m = 0, 1, 2, ...$, który nie jest punktem brzegowym, jest równa średniej wartości funkcji w czterech sąsiednich do $x$ wierzchołkach z $\mathcal{V}_{m+1}^K$.

**Definicja 11** *[36, Definicja 3.7.1] Niech* $\Delta_{K,m} g(x) = 5^m \sum_{y \in \mathcal{V}_{m,x}^K} (g(y) - g(x))$ *dla* $x \in \mathcal{V}_m^K$. *Definiujemy*

$$\mathcal{D}(\Delta_K) = \left\{ g \in C(K) : \exists f \in C(K) \text{ taka, że} \lim_{m\to\infty} \max_{x \in \mathcal{V}_m^K \setminus \mathcal{V}_0^K} \left| \frac{3}{2} \Delta_{K,m} g(x) - f(x) \right| = 0 \right\}$$

*Dla* $g \in \mathcal{D}(\Delta_K)$ *piszemy* $\Delta_K g = f$, *gdzie* $f$ *jest funkcją występującą w definicji* $\mathcal{D}(\Delta_K)$ *odpowiadającą funkcji* $g$. *Operator* $\Delta_K$ *nazywamy (standardowym) Laplasjanem Kigamiego, a zbiór* $\mathcal{D}(\Delta_K)$ *jego dziedziną.*

Gdy $\Delta_K g = 0$, to dla każdego $m \in N$ mamy $\Delta_{K,m} g = 0$ na $\mathcal{V}_m^K \setminus \mathcal{V}_0^K$ [36].

Innym niezwykle użytecznym narzędziem w teorii laplasjanu Kigamiego na trójkącie Sierpińskiego jest tzw. zewnętrzna pochodna normalna funkcji $f$ w punkcie $x \in \mathcal{V}_k^K$ względem komórki $S \in \mathcal{S}_k^K$, $k \in \mathbf{N}$.

**Definicja 12** *Dla funkcji $f \in C(K)$ i punktu $x \in \mathcal{V}_k^K \cap S$, gdzie $S \in \mathcal{S}_k^K$ definiujemy*

$$(\partial_n^S f)(x) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{y \in \mathcal{V}_{m,x}^K \cap S} (f(x) - f(y)). \tag{2.4}$$

*Jeśli komórka $S$ będzie ustalona lub będziemy rozważać ogólne własności pochodnej normalnej to czasem dla uproszczenia będziemy pisać po prostu $\partial_n$.*

Zwróćmy uwagę na fakt, że dowolny wierzchołek z $\mathcal{V}_k^K \backslash \mathcal{V}_0^K$, gdzie $k = 1, 2, 3, ...$, łączy dwie komórki z $\mathcal{S}_k^K$ i w związku z tym możemy policzyć w tym punkcie dwie niezależne zewnętrzne pochodne normalne, w kierunkach przeciwnych do siebie, względem każdej z tych dwóch komórek. Pochodna normalna jest dobrze określona dla wszystkich funkcji z dziedziny laplasjanu Kigamiego [36]; dla takich funkcji suma pochodnych normalnych w przeciwnych kierunkach wynosi 0 [45].

Dla funkcji $f \in C(K)$ i $m = 0, 1, 2, ...$ określamy formy kwadratowe

$$\mathcal{E}_{K,m}(f,f) = \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{T \in \mathcal{S}_m^K} \sum_{p,q \in T \cap \mathcal{V}_m^K} (f(p) - f(q))^2.$$

**Definicja 13** *Dla $f \in C(K)$ definiujemy*

$$\mathcal{E}_K(f,f) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{K,m}(f,f). \tag{2.5}$$

*Zbiór wszystkich funkcji, dla których powyższa granica jest skończona, nazwiemy dziedziną formy $\mathcal{E}_K$ i oznaczymy za pomocą $\mathcal{D}(\mathcal{E}_K)$.*

W powyższej definicji nie musimy zakładać istnienia granicy, gdyż ciąg $\mathcal{E}_{K,m}(f,f)$ jest niemalejący [27]. Ponieważ miara komórki $K$ jest skończona, więc $C(K) \subset L^2(K)$. Forma $\mathcal{E}$ jest domknięta na $L^2(K)$, tzn. jeśli $f_n \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_K)$, $f_n \to f$ w $L^2(K)$ oraz $\mathcal{E}_K(f_n - f_m, f_n - f_m) \to 0$, to $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_K) \subset C(K)$ i $\mathcal{E}_K(f,f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_K(f_n, f_n)$ [27].

Dla $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_K)$ określamy $\mathcal{E}_K(f,g)$ za pomocą wzoru polaryzacyjnego

$$\mathcal{E}_K(f,g) = \frac{1}{4}\left(\mathcal{E}_K(f+g, f+g) - \mathcal{E}_K(f-g, f-g)\right).$$

Forma $(\mathcal{E}_K, \mathcal{D}(\mathcal{E}_K))$ jest lokalną regularną formą Dirichleta na $L^2(K)$ [27, Twierdzenie 4.1].

Pomiędzy wprowadzonymi powyżej obiektami zachodzi następujący związek [36, Lemat 3.7.7., Twierdzenie 3.7.8.].

**Twierdzenie 1** *(wzór Gaussa-Greena) $\mathcal{D}(\Delta_K) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}_K)$. Ponadto dla każdych funkcji $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_K)$ i $f \in \mathcal{D}(\Delta_K)$ prawdziwa jest równość*

$$\mathcal{E}_K(g,f) = \sum_{x \in \mathcal{V}_0^K} g(x)\partial_n^K f(x) - \int_K g(y)\Delta_K f(y) d\mu(y). \tag{2.6}$$

Wzór Gaussa-Greena może posłużyć jako równoważna definicja laplasjanu Kigamiego na $K$. W pracy [45] definiuje się laplasjan przy jego pomocy rozważając funkcje $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_K) \cap C_0(K)$. Wtedy w sposób oczywisty pierwsza suma w (2.6) znika.

Przez $\mathcal{H}_j(K)$, $j \in \mathbf{N}$ oznaczamy przestrzeń liniową wszystkich funkcji $(j+1)$ - harmonicznych, tzn. takich, że $(\Delta_K^{j+1} f)(x) = 0$ dla każdego $x \in K$. W pracy [45] udowodniono, że funkcja $(j+1)$ - harmoniczna $f$ jest jednoznacznie opisana przez wartości $(\Delta_K^k f)(x)$ oraz $\partial_n^K(\Delta_K^k f)(x)$, $x \in \mathcal{V}_0^K$, $0 \le k \le (j-1)/2$ (przyjmujemy konwencję, że $\Delta_K^0 f = f$). Wartości w wierzchołkach wewnątrz komórki $K$ można wyliczać za pomocą wzorów indukcyjnych o charakterze lokalnym [45, wzór (5.8)](por. lemat 1 poniżej). Dla $j = 1$, a tylko tę wartość dalej rozpatrujemy, omawiany wzór przyjmuje następującą postać.

**Fakt 4** *[45] Niech $x_0, x_1, x_2$ oznaczają wierzchołki brzegowe pewnej komórki z $\mathcal{S}_m^K$, $m = 0, 1, 2, ...$, a $x$ wierzchołek z $\mathcal{V}_{m+1}^K$ leżący na środku krawędzi $x_0x_1$. Wówczas*

$$\Delta f(x) = \frac{2}{5}\left(\Delta f(x_0) + \Delta f(x_1)\right) + \frac{1}{5}\Delta f(x_2) \tag{2.7}$$

*oraz*

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{2}{5}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{1}{5} f(x_2) \\ & - \frac{1}{5^{m+1}}\left(\frac{3}{25}\left(\Delta f(x_0) + \Delta f(x_1)\right) + \frac{7}{75}\Delta f(x_2)\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

*Podobne równości zachodzą dla środków krawędzi $x_1x_2$ oraz $x_2x_0$.*

W dalszej części pracy będzie interesował nas tylko przypadek tzw. funkcji biharmonicznych, tzn. gdy $j = 1$. Wypiszemy elementy dwóch różnych baz przestrzeni $\mathcal{H}_1(K)$ zdefiniowanych w [45]. Pierwsza baza składa się z sześciu funkcji $f_{0k}$ oraz $f_{1k}$, $k = 1, 2, 3$, spełniających następujące warunki brzegowe

$$\begin{array}{c} f_{0k}(v_m) = \delta_{k,m} \\ \Delta f_{0k}(v_m) = 0 \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{c} f_{1k}(v_m) = 0 \\ \Delta f_{1k}(v_m) = \delta_{k,m} \end{array}, \tag{2.9}$$

Rysunek 2.1: Ilustracja działania rodziny kontrakcji $T_l$, $l = 1, 2, 3$, w przypadku komórki $K$

gdzie punkty $v_1, v_2, v_3$ są wierzchołkami z $\mathcal{V}_0^K$, tzn. punktami brzegowymi $K$, a $\delta_{k,m} = 1$, gdy $k = m$, $\delta_{k,m} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Druga baza (w terminologii pracy [45] *lepsza baza*) składa się z funkcji $f_{0k}^{(1)}$ i $g_{0k}^{(1)}$, dla których zachodzi

$$\begin{array}{ccc} f_{0k}^{(1)}(v_m) = \delta_{k,m} & \text{oraz} & g_{0k}^{(1)}(v_m) = 0 \\ \partial_n f_{0k}^{(1)}(v_m) = 0 & & \partial_n g_{0k}^{(1)}(v_m) = \delta_{k,m} \end{array}. \tag{2.10}$$

Oczywiście każda funkcja z drugiej bazy jest kombinacją liniową funkcji z pierwszej bazy. Warunki brzegowe (2.9) oraz (2.10) wymuszają następujące zależności [45, wzór (3.5)]

$$f_{0k}^{(1)} = f_{0k} + \sum_{l=1}^{3} b_{kl} f_{1l} \quad \text{oraz} \quad g_{0k}^{(1)} = \sum_{l=1}^{3} d_{kl} f_{1l}, \tag{2.11}$$

gdzie macierze współczynników $b_{kl}$ i $d_{kl}$ są odpowiednio postaci [45, wzór (5.9)]

$$\begin{pmatrix} -30 & 15 & 15 \\ 15 & -30 & 15 \\ 15 & 15 & -30 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 11 & -4 & -4 \\ -4 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 11. \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Niech $T_l$, $l = 1, 2, 3$, oznacza jednokładność w skali $\frac{1}{2}$ o środku $v_l$ (zob. rys. 2.1).

**Definicja 14** (system funkcji iterowanych, ang. *iterated function system) Powiemy, że $w$ jest słowem długości $m \in \mathbf{N}$ jeśli $w = (w_1, ..., w_m)$, gdzie $w_i = 1, 2, 3$, $1 \leq i \leq$*

*$m$. Dla słowa $w$ definiujemy*

$$T_w = T_{w_1} \circ T_{w_2} \circ ... \circ T_{w_m}$$

Zauważmy, że dla każdego $m \in \mathbf{N}$ możliwy jest rozkład komórki $K = \bigcup_{|w|=m} T_w K$ na komórki $T_w K$ z rodziny $\mathcal{S}_m^K$, których przekroje są co najwyżej jednopunktowe.

**Fakt 5** *(własności skalowania) Niech $w$ oznacza słowo o długości $m$. Zachodzą następujące własności skalowania*

*(a)* $\Delta_K(f \circ T_w) = \left(\frac{1}{5}\right)^m \Delta_K f \circ T_w$,

*(b)* $\partial_n(f \circ T_w) = \left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n f \circ T_w$,

*(c)* $\mathcal{E}_K(f,g) = \sum_{|w|=m} \left(\frac{5}{3}\right)^m \mathcal{E}_K(f \circ T_w, g \circ T_w)$.

Powyższe własności są konsekwencją struktury geometrycznej i harmonicznej standardowego trójkąta Sierpińskiego. Ich uzasadnienie można znaleźć w [45].

Udowodnimy teraz dwa lematy charakteryzujące funkcje z przestrzeni $\mathcal{H}_1(K)$.

**Lemat 1** *Niech funkcja $f \in \mathcal{H}_1(K)$. Załóżmy, że punkty $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}_m^K$, $m \in \mathbf{N}$ są wierzchołkami brzegowymi dowolnej komórki z $\mathcal{S}_m^K$. Niech punkty $v_2'$ i $v_3'$ leżą na środku krawędzi $v_1v_2$ i $v_1v_3$ odpowiednio. Wówczas zachodzi następujące równanie macierzowe:*

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2') \\ f(v_3') \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \partial_n f(v_1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \partial_n f(v_2') \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \partial_n f(v_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{12}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{7}{75} & -\frac{7}{75} & -\frac{1}{75} \\ \frac{12}{25} & \frac{1}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{7}{75} & -\frac{1}{75} & -\frac{7}{75} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ f(v_3) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m} \partial_n f(v_1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m} \partial_n f(v_2) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m} \partial_n f(v_3) \end{pmatrix}.$$

DOWÓD: Dzięki zależnościom (2.7) oraz (2.8), przy pomocy macierzy wymiaru $6 \times 6$ możemy zapisać przekształcenie liniowe umożliwiające wyznaczenie wartości funkcji oraz wartości jej laplasjanu Kigamiego w kolejnym kroku konstrukcji w punktach $v_2'$

i $v_3'$. Istotnie, otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2') \\ f(v_3') \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m+1}\Delta f(v_1) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m+1}\Delta f(v_2') \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m+1}\Delta f(v_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{125} & -\frac{3}{125} & -\frac{7}{375} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{125} & -\frac{7}{375} & -\frac{3}{125} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ f(v_3) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m}\Delta f(v_1) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m}\Delta f(v_2) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m}\Delta f(v_3) \end{pmatrix}.$$

Następnie, na mocy (2.11) i (2.12), oraz własności skalowania, macierz przejścia macierz przejścia z drugiej bazy przestrzeni $\mathcal{H}_1(K)$ do pierwszej jest postaci

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ f(v_3) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m}\Delta f(v_1) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m}\Delta f(v_2) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m}\Delta f(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 15 & 15 & 11 & -4 & -4 \\ 15 & -30 & 15 & -4 & 11 & -4 \\ 15 & 15 & -30 & -4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ f(v_3) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m}\partial_n f(v_1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m}\partial_n f(v_2) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m}\partial_n f(v_3) \end{pmatrix}.$$

Podobnie

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2') \\ f(v_3') \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m+1}\Delta f(v_1) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m+1}\Delta f(v_2') \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{m+1}\Delta f(v_2') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 15 & 15 & 11 & -4 & -4 \\ 15 & -30 & 15 & -4 & 11 & -4 \\ 15 & 15 & -30 & -4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2') \\ f(v_3') \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1}\partial_n f(v_1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1}\partial_n f(v_2') \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1}\partial_n f(v_3') \end{pmatrix}.$$

Porównując stronami powyższe macierze i wykonując proste obliczenia macierzowe, otrzymujemy żądaną zależność. $\square$

**Lemat 2** *Niech* $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, $i = 0,1,2$. *Funkcja* $\psi(x) = \varepsilon_0 f_{00}^{(1)}(x) + \varepsilon_1 f_{01}^{(1)}(x) + \varepsilon_2 f_{02}^{(1)}(x)$ *spełnia nierównosci* $0 \leq \psi(x) \leq 1$ *dla wszystkich* $x \in K$.

Dowód: Wystarczy dowieść, że $0 \leq \psi(x) \leq 1$ dla $x \in \mathcal{V}_m^K$, $m = 0,1,2,\ldots$. Udowodnimy lemat za pomocą indukcji matematycznej. Załóżmy, że $v_1, v_2, v_3$ są wierzchołkami brzegowymi pewnej komórki z rodziny $\mathcal{S}_m^K$. Rozważmy następujący warunek indukcyjny

$$0 \leq \psi(v) \quad \text{and} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^m |\partial_n \psi(v)| \leq 3\psi(v)\,, \quad v \in \{v_1, v_2, v_3\}\,. \tag{2.13}$$

Z definicji bazy (2.10) wynika, że funkcja $\psi$ spełnia powyższy warunek w punktach z $\mathcal{V}_0^K$. Przypuśćmy, że założenie indukcyjne spełnione jest dla wierzchołków z $\mathcal{V}_m^K$. Niech punkty $v_2'$ i $v_3'$ z $\mathcal{V}_{m+1}^K$ leżą odpowiednio na środku krawędzi $v_1v_2$ i $v_1v_3$. Oczywiście funkcja $\psi(x)$ jest elementem przestrzeni $\mathcal{H}_1(K)$. Dlatego na mocy lematu 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\psi(v_2') = &\left(\frac{12}{25}\psi(v_1) - \frac{7}{75}\left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n\psi(v_1)\right)\\ &+ \left(\frac{12}{25}\psi(v_2) - \frac{7}{75}\left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n\psi(v_2)\right)\\ &+ \left(\frac{1}{25}\psi(v_3) - \frac{1}{75}\left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n\psi(v_3)\right) \geq 0\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}3\psi(v_2') - \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \partial_n\psi(v_2') = &\left(\frac{66}{25}\psi(v_1) - \frac{12}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n\psi(v_1)\right)\\ &+ \left(\frac{6}{25}\psi(v_2) - \frac{2}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n\psi(v_2)\right)\\ &+ \left(\frac{3}{25}\psi(v_3) - \frac{1}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^m \partial_n\psi(v_3)\right) \geq 0\,.\end{aligned}$$

Podobny rachunek pokazuje, że również $3\psi(v_2') + \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \partial_n\psi(v_2') \geq 0$. Z powodu symetrii możemy zamienić w powyższym rozumowaniu punkty $v_2$ i $v_2'$ na punkty $v_3$ i $v_3'$. Otrzymujemy stąd, że (2.13) zachodzi również dla komórki o wierzchołkach $v_1$, $v_2'$ oraz $v_3'$ z $\mathcal{V}_{m+1}^K$. Na mocy zasady indukcji matematycznej funkcja $\psi(x)$ jest nieujemna.

Aby pokazać oczacowanie z góry $\psi(x) \leq 1$, wystarczy zastosować powyższe rozumowanie dla funkcji $1 - \psi$. $\square$

Zwróćmy uwagę, iż zarówno laplasjan Kigamiego jak i zewnętrzna pochodna normalna są operatorami lokalnymi. Z definicji tych obiektów natychmiast wynika, iż ich wartości na funkcji $f$ w dowolnym punkcie, zależą tylko od wartości tej funkcji na dowolnie małym otoczeniu tego punktu. Dzięki temu możemy rozpatrywać te pojecia na nieograniczonym trójkącie Sierpińskiego $F$. Również forma Dirichleta $(\mathcal{E}_K, \mathcal{D}(\mathcal{E}_K))$ posiada charakter lokalny i możemy ją definiować nie tylko na dowolnej komórce z $\mathcal{S}_0$, ale także na każdym zbiorze $F^n$ i przez przejście graniczne również na całym $F$.

Dla $n \in \mathbf{N}$ i funkcji $f \in C(K)$ tworzymy następujace dyskretne formy kwadratowe

$$\mathcal{E}_{F^n,m}(f,f) = \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{T \in \mathcal{S}_m^n} \sum_{p,q \in T \cap \mathcal{V}_m^n} (f(p) - f(q))^2, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Następnie definiujemy $n$-tą formę kwadratową

$$\mathcal{E}_{F^n}(f,f) = \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}_{F^n,m}(f,f) \tag{2.14}$$

Ponownie wyrażenia $\mathcal{E}_{F^n}^m(f,f)$ tworzą ciąg niemalejący ze względu na $m$, więc granica ta zawsze istnieje. Ostatecznie okeślamy

$$\mathcal{E}(f,f) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}_{F^n}(f,f) \tag{2.15}$$

Ciąg $\mathcal{E}_{F^n}(f,f)$ jest niemalejący. Zbiór funkcji $\{f \in C(K) : \mathcal{E}(f,f) < \infty\} \cap L^2(F)$ nazywamy dziedziną formy $\mathcal{E}$ i oznaczamy przez $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Forma $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ zadana przez (2.15) jest regularną lokalną formą Dirichleta na $L^2(F)$ [27, Twierdzenie 4.3]).

Dla funkcji $f \in L^2(F)$ definiujemy samosprzężony operator związany z formą $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ wzorem

$$\mathcal{E}(f,g) = -\int_F g(x)(\Delta_{L^2(F)} f)(x) d\mu(x), \tag{2.16}$$

dla wszystkich $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dokładniej, mówimy, że funkcja $f$ należy do dziedziny operatora $\Delta_{L^2(F)}$ (co zapisujemy w postaci $f \in \mathcal{D}(\Delta_{L^2(F)})$), jeśli $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ oraz istnieje funkcja $\Delta_{L^2(F)} f$ spełniajaca (2.16).

## 2.3 Funkcje sklejane

Na początku tego podrozdziału przedstawimy krótki zarys teorii funkcji sklejanych (ang. *spline*) na ograniczonym trójkącie Sierpińskiego, rozwiniętej w pracy [45]. Przestrzeń funkcji sklejanych $m$-tego rzędu na $K$, którą oznaczamy przez $S(\mathcal{H}_j(K), \mathcal{V}_m^K)$, składa się z funkcji, które po obcięciu do każdej komórki z $\mathcal{S}_m^K$ są

$(j+1)$-harmoniczne i spełniają odpowiednie warunki w punktach węzłowych z $\mathcal{V}_m^K$. Szczegółowo warunki te określa definicja 4.3 w pracy [45]. W rozważanym przez nas przypadku $j=1$ przyjmuje ona następującą postać.

**Definicja 15** *Mówimy, że funkcja $f$ należy do przestrzeni $S(\mathcal{H}_1(K), \mathcal{V}_m^K)$, jeśli dla każdego słowa $|w|=m$ zachodzi $f \circ T_w \in \mathcal{H}_1(K)$ i dla każdego wierzchołka z $\mathcal{V}_m^K \backslash \mathcal{V}_0^K$ suma obydwu pochodnych normalnych funkcji $f$ tym punkcie jest równa zero.*

Przypomnijmy, że dla każdego punktu, który nie jest wierzchołkiem brzegowym można policzyć dwie zewnętrzne pochodne normalne, względem dwóch komórek zawierających ten punkt.

**Twierdzenie 2** *(por. [45, Twierdzenie 4.4]) Niech $f \in S(\mathcal{H}_1(K), \mathcal{V}_m^K)$. Wówczas $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_K)$ oraz istnieje funkcja $g \in L^\infty(K)$ ciągła wewnątrz każdej komórki $T_w(K)$, $|w|=m$, spełniająca zależność* (2.6)*, tzn. dla każdej funkcji $h \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_K)$ zachodzi równość*

$$\mathcal{E}_K(h,f) = \sum_{x \in \mathcal{V}_0^K} h(x) \partial_n^K f(x) - \int_K h(y) g(y) d\mu(y).$$

W pracy [45] teoria funkcji sklejanych wprowadzona została dla ograniczonej wersji trójkąta Sierpińskiego. W dalszej części pracy będziemy potrzebować funkcji sklejanych na trójkącie nieograniczonym. Zacznijmy od następującej własności formy $\mathcal{E}$.

**Fakt 6** *Niech $f \in C(F)$ będzie funkcją o nośniku w zbiorze $\bigcup_{i=1}^n K_i$ dla pewnych komórek $K_i \in \mathcal{S}_0$, $i=1,...,n$, $n \in \mathbf{N}$. Wówczas $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{|K_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_{K_i})$, $i=1,...,n$. Ponadto zachodzi równość*

$$\mathcal{E}(f,f) = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_{K_i}(f_{|K_i}, f_{|K_i}).$$

DOWÓD: Istnieje $k_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla każdego $k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{F^k,m}(f,f) &= \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{S\in\mathcal{S}_m^k} \sum_{p,q\in S} (f(p)-f(q))^2 \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{i=1}^{n} \sum_{S\in\mathcal{S}_m^{K_i}} \sum_{p,q\in S} (f_{|K_i}(p)-f_{|K_i}(q))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{K_i,m}(f_{|K_i}, f_{|K_i}), \end{aligned} \tag{2.17}$$

dla $m = 0,1,2,\ldots$. Przechodząc do nieskończoności z $m$, a następnie z $k$ w (2.17) natychmiast otrzymujemy równość z tezy. Ze skończoności form po prawej stronie wynika skończoność $\mathcal{E}(f,f)$. I na odwrót, ze skończoności $\mathcal{E}(f,f)$ i z faktu, że wszystkie formy po prawej stronie są nieujemne, wynika skończoność każdej z nich. □

**Twierdzenie 3** *Niech $f \in C(F)$ będzie funkcją o nośniku w zbiorze $\bigcup_{i=1}^n K_i$ dla pewnych komórek $K_i \in \mathcal{S}_0$, $i = 1,\ldots,n$. Załóżmy, że:*

*(a) $f|_{K_i} \in S(\mathcal{H}_1(K_i), \mathcal{V}_m^{K_i})$,*

*(b) $\partial_n^{K_i} f(x)$ istnieje dla każdego $x \in \mathcal{V}_0^{K_i}$, $i = 1,\ldots,n$,*

*(c) dla każdego $x \in \mathcal{V}_0^{K_i} \cap \mathcal{V}_0^{K_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$,*

$$\partial_n^{K_i} f(x) + \partial_n^{K_j} f(x) = 0,$$

*(c) dla każdego $x \in \mathcal{V}_0^{K_i} \setminus \bigcup_{\{1\le j\le n,\ j\neq i\}} \mathcal{V}_0^{K_j}$, $i = 1,\ldots,n$,*

$$\partial_n^{K_i} f(x) = 0.$$

*Wówczas $f \in \mathcal{D}(\Delta_{L^2(F)})$ i $\Delta_{L^2(F)} f \in L^\infty(F)$.*

DOWÓD: Na mocy faktu 2 funkcja $f|_{K_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_{K_i})$, $i = 1,\ldots,n$ oraz istnieją funkcje $g_i$ spełniające zależność 2.6 wraz z $f|_{K_i}$. Na mocy równości analogicznej do (2.17) oraz zależności z twierdzenia 2 dla dowolnej funkcji $h \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ natychmiast dostajemy

$$\mathcal{E}(h,f) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{K_i}(h|_{K_i}, f_{|K_i}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in\mathcal{V}_0^{K_i}} h(x)\partial_n^{K_i} f(x) - \sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} h(y) g_i(y) d\mu_{K_i}(y).$$

Założenie (b) powoduje, że z (c) i (d) wynika, iż $\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\mathcal{V}_0^{K_i}} h(x)\partial_n^{K_i} f(x) = 0$, co daje równość

$$\mathcal{E}(h,f) = -\sum_{i=1}^{n}\int_{K_i} h(y)g_i(y)d\mu_{K_i}(y) = -\int_F h(y)g(y)d\mu(y),$$

gdzie

$$g = \begin{cases} g_i & \text{na} \quad \mathrm{Int}(K_i) \\ 0 & \text{na} \quad F\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Int}(K_i). \end{cases}$$

Z faktu 2 wynika, że $g \in L^\infty(F)$, a zatem $g \in L^2(F)$. Ostatecznie z definicji (2.16) mamy, że $f \in \mathcal{D}(\Delta_{L^2(F)})$ i $g = \Delta_{L^2(F)} f$. $\square$

## 2.4 Ruch Browna i proces $\alpha$-stabilny na trójkącie

Forma dwuliniowa $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ zdefiniowana przez (2.15) jest regularną lokalną formą Dirichleta na $L^2(F)$. W myśl ogólnej teorii procesów Markowa każdej regularnej formie Dirichleta odpowiada tzw. $\mu$-symetryczny proces Hunta $(Z_t; t \geq 0)$ z przestrzenią stanów $F$ związany z tą formą poprzez półgrupę przejścia. Jeśli dodatkowo rozważana forma jest lokalna, to proces ten musi być dyfuzją [26, Twierdzenie 7.2.1.]. Tak więc forma $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ związana jest z procesem dyfuzji na zbiorze $F$, którego generatorem na $L^2(F)$ jest operator zdefiniowany przez (2.16) [26, s. 18 i 23].

Po raz pierwszy poprawną matematycznie konstrukcję tego procesu na nieograniczonym trójkącie Sierpińskiego podali niezależnie S. Goldstein i S. Kusuoka w roku 1987 [21, 38]. Otrzymali oni proces Markowa o ciągłych trajektoriach na zbiorze $F$ jako granicę symetrycznego błądzenia losowego po grafach aproksymujących zbiór w $n$-tym kroku konstrukcji (ang. *pre-gasket*). Wynik ten został znacząco rozszerzony przez M. Barlowa i E. Perkinsa w 1989 roku [6], którzy nie tylko w podobny sposób skonstruowali dyfuzję na zbiorze $F$, ale ponadto udowodnili istnienie jej gęstości przejścia absolutnie ciagłej względem $d$-wymiarowej miary Hausdorffa. Za pomocą bardziej subtelnych metod pokazali, że spełnia ona oszacowania (1.4) i jest rozwiązaniem analogonu równania ciepła dla generatora dyfuzji. Z powodu analogii do przypadku klasycznego nazwali oni otrzymany proces ruchem Browna na trójkącie Sierpińskiego.

Gęstość przejścia dyfuzjii względem $d$-miary $\mu$ tak jak w rozdziale 1.1 oznaczamy przez $q(t,x,y)$. Dla $n \in \mathbf{Z}$ zachodzi własność skalowania $q(t,x,y) = 3^n q(2^{nd_w}t, 2^n x, 2^n y)$ (zob. [6, Twierdzenie 7.8]).

Przez $Q_u$, $u > 0$, oznaczamy półgrupę operatorów na $L^2(F)$ generowaną przez operator $\Delta_{L^2(F)}$. Jest to równocześnie półgrupa półgrupa przejścia procesu $Z$; dla $f \in L^2(F)$ zachodzi

$$Q_u f(x) = \int_F f(y) q(u,x,y) d\mu(y), \quad u > 0. \tag{2.18}$$

Konsekwencją istnienia fraktalnej dyfuzji na zbiorze $F$ jest istnienie $\alpha$-stabilnego ruchu Levy'ego (zob. def. 3). Zauważmy, że na mocy (1.5) i twierdzenia Fubiniego mamy

$$\begin{aligned} \frac{P_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\int \varphi(y) p(t,x,y) d\mu(y) - \varphi(x)\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\int \varphi(y) \int_0^\infty q(u,x,y)\eta_t(u) du d\mu(y) - \varphi(x)\right) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^\infty \left(\int \varphi(y) q(u,x,y) d\mu(y) - \varphi(x)\right) \eta_t(u) du \\ &= \int_0^\infty \left(Q_u\varphi(x) - \varphi(x)\right) \frac{\eta_t(u)}{t} du, \end{aligned} \tag{2.19}$$

dla wszystkich funkcji $\varphi$, dla których powyższe całki podwójne są zbieżne. Nam wystarczy rozważać $\varphi \in C_c(F)$.

Z własności funkcji $q(u,x,y)$ oraz z reprezentacji (1.5) wynika, że również $p(t,x,y) = 3^n p(2^{\alpha n}t, 2^n x, 2^n y)$. Oznacza to, że dla $n \in \mathbf{Z}$ proces $2^n X_t$ ma ten sam rozkład, co $X_{2^{\alpha n}t}$. Podobnie rozkład $X_{\tau_{2^n D}}$ jest przeskalowaniem rozkładu $X_{\tau_D}$, tzn. $P^x\{X_{\tau_D} \in E\} = P^{2^n x}\{X_{\tau_{2^n D}} \in 2^n E\}$. Ta niezmienniczość na skalowanie w przypadku miary $\alpha$-harmonicznej oraz skalowanie gęstości procesu i własność (2.3) dają równość $G_{2^n D}(2^n x, 2^n y) = 2^{(\alpha-d)n} G_D(x,y)$ oraz $E^{2^n x}\tau_{2^n D} = 2^{\alpha n} E^x \tau_D$, gdzie $D$ jest dowolnym otwartym i ograniczonym podzbiorem $F$. Wprost z definicji wynika również, że jeśli funkcja $f$ jest $\alpha$-harmoniczna w $D$, to $\sigma_n f$ jest $\alpha$-harmoniczna w $2^{-n}D$.

## 2.5 Konstrukcja i własności pewnej kluczowej funkcji

W klasycznej analizie bardzo ważną rolę odgrywają radialnie malejące funkcje gładkie przybliżające indykator. Również metoda, którą chcemy udowodnić główne twierdzenie wymaga istnienia odpowiednika takiej funkcji dla laplasjanu na trójkącie Sierpińskiego. Dla $v \in \mathcal{V}_0$ potrzebujemy funkcji $\varphi$ z dziedziny generatora stabilnego ruchu Levy'ego $\Delta^{\alpha/d_w}$ takiej, że $\varphi(x) = 1$ dla $x \in B_1(v)$, $\varphi(x) = 0$ dla $x \notin B_0(v)$ oraz $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ dla wszystkich $x \in F$. W klasycznej teorii na $\mathbf{R}^N$ taką funkcję łatwo opisać jawnym wzorem dla dowolnych kul $B_{\mathbf{R}^N}(v, r)$, ale specyfika analizy na trójkacie Sierpińskiego powoduje pewne trudności, których ominięcie wymaga dodatkowych narzędzi, takich jak funkcje sklejane. Poniżej przedstawiona jest konstrukcja funkcji o tych własnościach, która nie jest gładka, ale należy do dziedziny operatora $\Delta_{L^2(F)}$, i co więcej $\Delta_{L^2(F)} f \in L^\infty(F)$. Stąd wynika, jak się za chwilę okaże, że należy ona także do $\mathcal{D}(\Delta^{\alpha/d_w})$.

Niech $v \in \mathcal{V}_0$ będzie wierzchołkiem wspólnym dwóch sąsiednich komórek $K_1, K_2 \in \mathcal{S}_0$. Przypomnijmy, że $B_0(v) = \mathrm{Int}(K_1 \cup K_2)$. Niech $v_{12}, v_{13}$ oraz $v_{22}, v_{23}$ będą pozostałymi punktami brzegowymi $K_1$ i $K_2$ odpowiednio, zlokalizowanymi w taki sposób, że $v_{1i}$ i $v_{2i}$, $i = 1, 2$ mają jednakową drugą współrzędną kartezjańską. Dla wygody oznaczmy także $v_{11} = v_{21} = v$. Dodatkowo, niech punkty $u_{11}, u_{12}$ oraz $u_{13}$ będą zlokalizowane odpowiednio na środkach krawędzi $v_{12}v_{13}$, $v_{11}v_{13}$ oraz $v_{11}v_{12}$. Analogicznie określmy $u_{21}, u_{22}, u_{23}$ (zob. rys. 2.2). Komórki $S(v_{12}, u_{13}, u_{11})$, $S(u_{13}, v_{11}, u_{12})$, $S(u_{11}, u_{12}, v_{13})$ oraz $S(v_{21}, u_{23}, u_{22})$, $S(u_{23}, v_{22}, u_{21})$, $S(u_{22}, u_{21}, v_{23})$ są rozmiaru $1/2$ i należą do rodziny $\mathcal{S}_1$.

Niech $T_l$, $l = 1, 2, 3$, oznacza jednokładność w skali $\frac{1}{2}$ o środku $v_{1l}$ (rys. 2.2). Przez $f_{0,k}^{(1)}$ oznaczmy funkcje zadane przez (2.10) na $K_1$. Określamy

$$\varphi_1 = \begin{cases} (f_{01}^{(1)} + f_{02}^{(1)} + f_{03}^{(1)}) \circ T_1^{-1} & \text{na} \quad T_1(K_1) \\ f_{01}^{(1)} \circ T_2^{-1} & \text{na} \quad T_2(K_1) \\ f_{01}^{(1)} \circ T_3^{-1} & \text{na} \quad T_3(K_1) \end{cases} \tag{2.20}$$

Wówczas $\varphi_1 \in S(\mathcal{H}_1(K_1), \mathcal{V}_1^{K_1})$ (w istocie $\varphi_1$ jest sumą trzech funkcji bazowych tej przestrzeni, por. [45, wzory (5.13) i (5.15)]). Analogicznie określamy funkcję

Rysunek 2.2: Ilustracja oznaczeń przyjętych przy konstrukcji funkcji $\varphi$ oraz działania rodziny kontrakcji $T_l$, $l = 1, 2, 3$, na zbiorze $B_0(v)$

$\varphi_2$ na $K_2$. Ostatecznie definiujemy funkcję $\varphi$ na całym nieograniczonym trójkącie Sierpińskiego,

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{na} \quad K_1 \\ \varphi_2 & \text{na} \quad K_2 \\ 0 & \text{na} \quad F \backslash (K_1 \cup K_2). \end{cases} \tag{2.21}$$

**Lemat 3** *Funkcja $\varphi$ zdefiniowana przez* (2.21) *posiada następujące własności: $\varphi(x) = 1$ dla $x \in B_1(v)$, $\varphi(x) = 0$ dla $x \notin B_0(v)$ oraz $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ dla wszystkich $x \in F$.*

DOWÓD: Wprost z definicji wynika, że $\varphi(x) = 0$ poza zbiorem $K_1 \cup K_2$, a więc dla wszystkich $x \notin B_0(v)$. Dla dowodu pozostałych własności rozważmy zbiór $K_1$ i funkcję $\varphi_1$. Zauważmy, że

$$\varphi_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in T_1(K_1) \\ f_{01}^{(1)}(T_2^{-1}(x)) & \text{dla} \quad x \in T_2(K_1) \\ f_{01}^{(1)}(T_3^{-1}(x)) & \text{dla} \quad x \in T_3(K_1) \end{cases} \tag{2.22}$$

W istocie $f_{01}^{(1)} + f_{02}^{(1)} + f_{03}^{(1)} = 1$ na $K_1$, ponieważ z (2.10) wynika, że $f_{01}^{(1)} + f_{02}^{(1)} + f_{03}^{(1)} = 1$, $\partial_n^{K_1}(f_{01}^{(1)} + f_{02}^{(1)} + f_{03}^{(1)}) = 0$ na brzegu zbioru $K_1$. Jak już zauważyliśmy w podrozdziale 2.2, każda funkcja z $\mathcal{H}_1(K)$ wyznaczona jest jednoznacznie przez swoje wartości oraz wartości pochodnej normalnej w punktach brzegowych.

Ponadto na mocy lematu 2 funkcje $f_{01}^{(1)} + f_{02}^{(1)} + f_{03}^{(1)}$ oraz $f_{01}^{(1)}$ sa nieujemne i ograniczone przez 1. To daje tezę lematu dla funkcji $\varphi$. $\square$

Poniższa własność jest kluczowa dla dowodu głownego twierdzenia.

**Lemat 4** *Funkcja* $\varphi \in C_c(F)$ *zdefiniowana przez* (2.21) *należy do dziedziny generatora stabilnego ruchu Levy'ego* $\Delta^{\alpha/d_w}$.

DOWÓD: Z twierdzenia 37.1 w pracy [19] mamy

$$\lim_{u\to\infty} \eta_1(u)u^{1+\alpha/d_w} = \alpha/(2\Gamma(1-\alpha/d_w)).$$

Oznaczmy $A_\alpha = \alpha/(2\Gamma(1-\alpha/d_w))$. Własność skalowania

$$\eta_t(u) = t^{-d_w/\alpha}\eta_1(t^{-d_w/\alpha}u),\ t, u > 0$$

oraz ograniczność funkcji $\eta_1(u)$ daje oszacowanie

$$\eta_t(u) \le Ctu^{-1-\alpha/d_w}, \quad t, u > 0 \tag{2.23}$$

oraz istnienie następującej granicy

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} t^{-1}\eta_t(u) &= \lim_{t\to 0} t^{-1-d_w/\alpha}\eta_1(ut^{-d_w/\alpha}) \\ &= u^{-1-\alpha/d_w} \lim_{s\to\infty} s^{1+\alpha/d_w}\eta_1(s) \\ &= A_\alpha u^{-1-\alpha/d_w}, \quad u > 0.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Udowodnimy, że

$$\frac{P_t\varphi(x)-\varphi(x)}{t} \to A_\alpha \int_0^\infty \left(Q_u\varphi(x)-\varphi(x)\right) u^{-1-\alpha/d_w} du \tag{2.25}$$

w normie supremum.

Dzięki (2.10) funkcja $\varphi$ spełnia założenia twierdzenia 3, więc $\varphi$ należy do dziedziny $\Delta_{L^2(F)}$ i $(\Delta_{L^2(F)}\varphi)(x)$ jest istotnie ograniczona. Stąd

$$\begin{aligned}|Q_u\varphi(x)-\varphi(x)| &= \left|\int_0^u \frac{d}{ds}Q_s\varphi(x)ds\right| \\ &= \left|\int_0^u Q_s\Delta_{L^2(F)}\varphi(x)ds\right| \\ &\le u\|\Delta_F\varphi(x)\|_\infty\end{aligned}$$

dla każdego $t > 0$. Ponadto, mamy

$$|Q_u\varphi(x) - \varphi(x)| \le 2\|\varphi(x)\|_\infty.$$

Wobec powyższego oraz wzoru (2.19),

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{P_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} - A_\alpha \int_0^\infty (Q_u\varphi(x) - \varphi(x))u^{-1-\alpha/d_w} du\right| \\
&\le \int_0^\infty |Q_u\varphi(x) - \varphi(x)| \left|\frac{\eta_t(u)}{t} - A_\alpha u^{-1-\alpha/d_w}\right| du \\
&\le C' \int_0^\infty \min(u,1) \left|\frac{\eta_t(u)}{t} - A_\alpha u^{-1-\alpha/d_w}\right| du\,.
\end{aligned}$$

Dzięki (2.23) i (2.24) oraz na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, powyższa całka zbiega do zera przy $t \to 0$. Lemat został udowodniony. $\square$

# Rozdział 3

# Teoria funkcji $\alpha$-harmonicznych

## 3.1 Klasyczna brzegowa nierówność Harnacka - rys historyczny

Powróćmy na chwilę do klasycznej analizy w $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$. Mówimy, że funkcja $f$ określona na pewnym zbiorze $D \subset \mathbf{R}^N$ jest harmoniczna, gdy $f \in C^2(D)$ oraz $\Delta f = 0$ na $D$, gdzie $\Delta$ oznacza klasyczny operator Laplace'a, tj. $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Motywacje do badania funkcji harmonicznych pochodzą wprost z fizyki. Równanie $\Delta f = 0$, zwane równaniem Laplace'a, opisuje wiele procesów zachodzących w przyrodzie, takich jak chociażby potencjał grawitacyjny czy stacjonarny rozkład temperatury wewnątrz danego ośrodka.

Pod koniec pierwszej połowy XX wieku S. Kakutani [30, 31] dostrzegł słynny związek pomiędzy funkcjami harmonicznymi i ruchem Browna, który zastosował do rozwiązania problemu Dirichleta. Mamy następującą probabilistyczną charakteryzację funkcji harmonicznych. Funkcja $f$ jest harmoniczna w $D \subset \mathbf{R}^N$, jeśli dla dowolnego otwartego i ograniczonego zbioru $U$ takiego, że $\overline{U} \subset D$ spełnia tzw. warunek średniej $f(x) = E^x f(B_{\tau_U})$, gdzie $(B_t)_{t>0}$ oznacza $N$-wymiarowy ruch Browna.

Twierdzenie 4 udowodnione w następnym podrozdziale jest odpowiednikiem tzw. brzegowej nierówności Harnacka z klasycznej teorii funkcji harmonicznych w $\mathbf{R}^N$. W przypadku gładkich podzbiorów $\mathbf{R}^2$ była ona już znana na początku drugiej połowy XX wieku. Jej dowód nie rozszerzał się jednak na wyższe wymiary z powodu braku możliwości zastosowania narzędzi analizy zespolonej. Kilkanaście lat później

A. Ancona i B. Dahlberg udowodnili Brzegową nierówność Harnacka (skr. BHP, ang. *Boundary Harnack Principle*) dla tzw. zbiorów Lipschitza, tzn. ograniczonych podzbiorów $\mathbf{R}^N$ o odpowiednio regularnym brzegu (zob. [1, 17]). Wspomnijmy, że praca [1] zawiera dowód BHP nawet w szerszym kontekście funkcji harmonicznych względem pewnej klasy operatorów eliptycznych, do której należy klasyczny laplasjan. D. Jerison i C. Kenig uogólnili twierdzenie na tzw. zbiory o brzegu dostępnym niestycznie (ang. *nontangentially accessible domains*) [28].

Inną drogą możliwych uogólnień było rozpatrywanie funkcji harmonicznych względem nielokalnych operatorów pseudoróżniczkowych. Najprostszym i najlepiej zbadanym przedstawicielem tej grupy operatorów jest ułamkowy laplasjan $-(-\Delta)^{\alpha/2}$, $0 < \alpha < 2$, który jest generatorem izotropowego (symetrycznego) procesu $\alpha$-stabilnego w $\mathbf{R}^N$. Mówimy, że funkcja $f$ jest harmoniczna względem $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ (lub inaczej $\alpha$-harmoniczna) w otwartym i ograniczonym zbiorze $D \subset \mathbf{R}^N$ jeśli $f$ jest ciągła w $D$ oraz $(-(-\Delta)^{\alpha/2})f = 0$ na $D$. Ta definicja równoważna jest warunkowi wartości średniej (por. podrozdz. 1.5) względem rozkładu izotropowego procesu $\alpha$-stabilnego w chwili wyjścia ze zbioru $D$ [12].

BHP dla ułamkowego laplasjanu została udowodniona po raz pierwszy w 1997 roku przez K. Bogdana dla zbiorów Lipschitza [9]. Stała w tym twierdzeniu zależała w sposób istotny od dziedziny harmoniczności. Inny, bardziej probabilistyczny, dowód tego twierdzenia zawiera praca [11].

Powyższy wynik został uogólniony przez R. Songa i J.-M. Wu w pracy [40]. Pokazano tam, że brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji $\alpha$-harmonicznych w $\mathbf{R}^N$ zachodzi dla dowolnego zbioru otwartego $D$ ze stałą zależną od promienia największej kuli, jaką można wpisać w przekrój zbioru $D$ z kulą o środku w ustalonym punkcie $v$.

W 2006 roku K. Bogdan, T. Kulczycki i M. Kwaśnicki uogólnili BHP na dowolne ograniczone zbiory otwarte ze stałą, która w żaden sposób nie zależy od dziedziny $\alpha$-harmoniczności [13]. Niezwykle pomysłowa metoda wykorzystana w dowodzie twierdzenia w żaden sposób nie zależy od geometrii zbioru $D$.

## 3.2 Jednostajna brzegowa zasada Harnacka dla funkcji $\alpha$-harmonicznych na trójkącie Sierpińskiego

Na przełomie lat 80. i 90. ubiegłego wieku pojawiły się pierwsze prace J. Kigamiego (zob. [32]-[36]) dotyczące analizy na pewnej klasie fraktali przypominajacych strukturą trójkąt Sierpińskiego. Są to zbiory które można konstruować w sposób iteracyjny i przybliżać odpowiednimi grafami w kolejnych krokach konstrukcji (fraktale PCF, z ang. *post-critically finite fractals*). Na fraktalach typu PCF większość własności funkcji harmonicznych badana była w ujęciu analitycznym (np. [36]). Własnosci takie jak nierówność Harnacka dowodzone były bardziej probabilistycznie dla trójkąta Sierpińskiego. Wynik ten uzyskał M. Barlow w [2]. Dywan Sierpińskiego (który nie jest fraktalem PCF) badany był przez M. Barlowa i R. Bassa w pracach [3, 4]. Co ciekawe, sama BHP w odniesieniu do dyfuzji na fraktalach nie była jeszcze badana.

W przypadku funkcji $\alpha$-harmonicznych brzegowa zasada Harnacka na trójkącie Sierpińskiego została udowodniona po raz pierwszy przez K. Bogdana, A. Stósa i P. Sztonyka w roku 2000 dla zbioru $D$ będącego wnętrzem skończonej sumy komórek, o być może różnych rozmiarach, i dla $\alpha \in (0,1) \cup (d, d_w)$ [14]. Podobny wynik zaprezentował A. Stós w pracy [42] dla dywanu Sierpińskiego. Ograniczenie na parametr stabilności wynika tu z braku wiedzy o uderzaniu w brzeg przez proces przy wychodzeniu z kuli dla pozostałych $\alpha$.

Zaprezentowane poniżej twierdzenie jest istotnym uogólnieniem dotychczasowych wyników dla trójkąta Sierpińskiego w przypadku $\alpha < 1$. Wzorując się na metodzie pochodzącej z pracy [13], uwzględniając konieczne modyfikacje wynikajace ze struktury geometrycznej trójkata oraz te spowodowane komplikacjami natury analitycznej, udowodniona została brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji $\alpha$-harmonicznych i dla dowolnego podzbioru otwartego nieograniczonego trójkąta Sierpińskiego $F$, ze stałą niezależną od rozważanego zbioru.

**Twierdzenie 4** *Niech $\alpha \in (0,1)$. Dla $n \in \mathbf{Z}$ ustalmy $v \in \mathcal{V}_{n-1}$. Niech $D$ będzie dowolnym otwartym podzbiorem $B(v, 2^{-(n-4)})$. Niech $f$ oraz $g$ będą nieujemnymi* *funkcjami regularnie $\alpha$-harmonicznymi na $D$ takimi, że $f(x) = g(x) = 0$ dla $x \in B(v, 2^{-(n-4)}) \setminus D$. Wówczas istnieje stała $c_8$ zależna wyłącznie od $\alpha$ taka, że*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c_8 \frac{f(y)}{g(y)}$$

*dla wszystkich $x, y \in D \cap B_n(v)$.*

Zaczniemy od dowodu lematu posiadającego ciekawą interpretację probabilistyczną. Jeśli proces startuje z punktu wewnętrznego zbioru $B_{n-1}(v)$ odpowiednio bliskiego punktowi $v$, to prawdopodobieństwo, że wyskoczy do dopełnienia tego zbioru szacuje się przez wartość oczekiwaną czasu pierwszego wyjścia procesu z rozważanego podzbioru $D \subseteq B_{n-1}(v)$. W dowodzie poniższego lematu wykorzystane będą argumenty analityczne przygotowane w poprzednim rozdziale.

**Lemat 5** *Niech $v \in \mathcal{V}_{n-1}$ dla pewnego $n \in \mathbf{Z}$. Niech $D \subset B_{n-1}(v)$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Wtedy istnieje stała $c_9 = c_9(\alpha)$ taka, że*

$$P^x(X_{\tau_D} \notin B_{n-1}(v)) \leq c_9 2^{-n\alpha} E^x \tau_D, \quad x \in D \cap B_n(v). \tag{3.1}$$

DOWÓD: Ze względu na niezmienniczość miary $\alpha$-harmonicznej na skalowanie i własność skalowania średniego czasu wyjścia procesu ze zbioru $D$, oraz ze względu na to, że każdy wierzchołek $v \in \mathcal{V}_{n-1}$, $n \in \mathbf{Z}$ można otrzymać z pewnego wierzchołka $v' \in \mathcal{V}_0$ poprzez skalowanie, wystarczy przeprowadzić dowód nierówności (3.1) dla $n = 1$.

Niech $\varphi \in C_c(F)$ będzie funkcją zdefiniowaną przez (2.21). Na mocy (1.11) i lematów 3, 4 dla $x \in D \cap B_1(v)$ zachodzi

$$\begin{aligned} P^x(X_{\tau_D} \notin B_0(v)) &= E^x[\varphi(x) - \varphi(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \in B_0(v)^c] \\ &\leq E^x[\varphi(x) - \varphi(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \in D^c] \\ &= -\int G_D(x,y) \Delta^{\alpha/d_w} \varphi(y) dy \\ &\leq C \int G_D(x,y) dy, \end{aligned}$$

gdzie $C = \|((-\Delta)^{\alpha/d_w})\varphi(x)\|_\infty$. Ponieważ $\int G_D(x,y)dy = E^x \tau_D$, to kończy dowód. $\square$

Teraz zdefiniujemy funkcjonał, który będzie pełnił bardzo ważną rolę w dalszej części pracy. Dla $v \in F$, $r > 0$ i nieujemnej funkcji $f$ niech

$$\Lambda_{v,r}(f) = \int_{B(v,r)^c} |y-v|^{-d-\alpha} f(y) d\mu(y).$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że powyższy funkcjonał posiada własność skalowania, $\Lambda_{v,r}(f) = 2^{-\alpha n} \Lambda_{2^{-n}v, 2^{-n}r}(\sigma_n f)$.

**Lemat 6** *Załóżmy, że $\alpha \in (0,1)$ oraz $v \in \mathcal{V}_{n-1}$ dla $n \in \mathbf{Z}$. Wtedy istnieje stała $c_{10}$ zależąca tylko od $\alpha$ taka, że dla każdej funkcji $f \geq 0$ regularnie $\alpha$-harmonicznej na pewnym otwartm $D \subset B(v, 2^{-(n-4)})$ i takiej, że $f(x) = 0$ na $D^c \cap B(v, 2^{-(n-4)})$ zachodzi nierówność*

$$f(x) \leq c_{10} 2^{-n\alpha} \Lambda_{v, 2^{-(n-2)}}(f), \; x \in D \cap B(v, 2^{-(n-2)}).$$

Dowód: Ze względu na własności skalowania wystarczy przeprowadzić dowód w przypadku, gdy $n = 1$. Niech $f \geq 0$ będzie nieujemną funkcją regularnie $\alpha$-harmoniczną na $D \subset B(v, 8)$. Dla $x \in D$ niech

$$f_1(x) = E^x[f(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \in B(v, 12)],$$
$$f_2(x) = E^x[f(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \in B(v, 12)^c].$$

Jest jasne, że $f = f_1 + f_2$ na $F$, $\operatorname{supp} f_1 \subseteq \overline{B(v,12)}$, $\operatorname{supp} f_2 \subseteq B(v,12)^c \cup \overline{D}$ oraz że funkcje $f_1$ i $f_2$ są regularnie $\alpha$-harmoniczne na $D$.

Dla $z \in B(v, 2)$ oraz $s \in (4, 8)$ niech $K(z, s)$ oznacza kulę zdefiniowaną przez (1.13). Oznaczmy: $R = B(v, 12) \cap B(v, 4)^c$. Dla $x \in B(v, 2)$ i $y \in R$ zdefiniujmy nowe jądro wzorem

$$P(x, y) = \int_4^8 P_{K(z_0,s)}(x, y) ds,$$

gdzie $z_0$ jest punktem wybranym jak w fakcie 1. Wynika stąd, że $X_t$ nie uderza w brzeg kuli $K(z_0, s)$ w $F$ dla prawie każdego $s \in (4, 8)$. Stąd i z monotoniczności miary $\alpha$-harmonicznej względem dziedziny dla $x \in D \cap B(v, 2)$ możemy napisać

$$\begin{aligned} f_1(x) &= E^x[f_1(X_{\tau_{D \cap K(z_0,s)}}); X_{\tau_{D \cap K(z_0,s)}} \in B(v, 12)] \\ &\leq \int_{K(z_0,s)^c \cap B(v,12)} P_{K(z_0,s)}(x, y) f_1(y) d\mu(y) \\ &\leq \int_{B(v,4)^c \cap B(v,12)} P_{K(z_0,s)}(x, y) f_1(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia Fubiniego

$$f_1(x) \le \frac{1}{4}\int_R f_1(y)\int_4^8 P_{K(z_0,s)}(x,y)ds d\mu(y) = \frac{1}{4}\int_R f_1(y)P(x,y)d\mu(y).$$

W [14, Rozdział 7] udowodniono, że $P(x,y) \le C(\alpha)$ dla $x \in B(v,2)$ i $y \in R$. Zatem

$$f_1(x) \le C' \int_R f_1(y)d\mu(y), \; x \in D \cap B(v,2).$$

Ponadto, $|v-y| \le 12$, zatem $|v-y|^{-d-\alpha} \ge (12)^{-d-\alpha}$. Stąd otrzymujemy odpowiednie oszacowanie dla pierwszej funkcji

$$f_1(x) \le C'' \int_R |v-y|^{-d-\alpha} f_1(y)d\mu(y) \le C'' \int_{B(v,2)^c} |v-y|^{-d-\alpha} f(y)d\mu(y)$$

dla $x \in D \cap B(v,2)$ ze stałą $C'' = C''(\alpha)$.

Następnie pokażemy podobne oszacowanie dla funkcji $f_2$. Zauważmy, że dla $z \in B(v,4)$ oraz $y \in B(v,12)^c$ mamy $|y-z|^{-d-\alpha} \le C^{(3)}|v-y|^{-d-\alpha}$. Dzięki temu, dla $x \in D \cap B(v,2)$ dostajemy

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= E^x[f(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \in B(v,12)^c] \\
&\le \int_{B(v,12)^c} P_{B(v,4)}(x,y) f_2(y)d\mu(y) \\
&\le C^{(4)} \int_{B(v,12)^c} \left(\int_{B(v,4)} G_{B(v,4)}(x,z)|z-y|^{-d-\alpha}d\mu(z)\right) f_2(y)d\mu(y) \\
&\le C^{(5)} \int_{B(v,12)^c} \left(\int_{B(v,4)} G_{B(v,4)}(x,z)d\mu(z)\right) f_2(y)|v-y|^{-d-\alpha}d\mu(y) \\
&= C^{(6)} E^x \tau_{B(v,4)} \int_{B(v,12)^c} f_2(y)|v-y|^{-d-\alpha}d\mu(y) \\
&\le C^{(7)} \int_{B(v,2)^c} f(y)|v-y|^{-d-\alpha}d\mu(y)
\end{aligned}$$

gdzie stałe $C^{(3)}, ..., C^{(7)}$ zależą wyłącznie od $\alpha$. Ostatecznie dla $x \in D \cap B(v,2)$ otrzymujemy

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \le C^{(8)}(\alpha) \int_{B(v,2)^c} |v-y|^{-d-\alpha} f(y)d\mu(y) = C^{(8)}(\alpha)\Lambda_{v,2}(f).$$

To kończy dowód lematu. $\square$

**Lemat 7** *Niech* $\alpha \in (0,1)$. *Ponadto niech* $v \in \mathcal{V}_{n-1}$ *dla pewnego* $n \in \mathbf{Z}$. *Wówczas istnieje stała* $c_{11} = c_{11}(\alpha)$ *taka, że dla każdej funkcji* $f \geq 0$ *regularnie* $\alpha$*-harmonicznej na* $D \subset B(v, 2^{-(n-4)})$ *i takiej, że* $f(x) = 0$ *na* $B(v, 2^{-(n-4)}) \backslash D$ *zachodzą oszacowania*

$$c_{11}{}^{-1} \Lambda_{v,2^{-n}}(f) E^x \tau_D \leq f(x) \leq c_{11} \Lambda_{v,2^{-n}}(f) E^x \tau_D, \; x \in D \cap B_n(v).$$

DOWÓD: Zauważmy, że ze względu na własności skalowania rozpatrywanego funkcjonału i średniego czasu wyjscia ze zbioru $D$ wzór z tezy lematu nie zależy od $n$. Przeprowadzamy więc dowód lematu w przypadku, gdy $n = 1$. Niech $x \in D \cap B_1(v)$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(x) &= E^x[f(X_{\tau_{D\cap B_0(v)}}); X_{\tau_{D\cap B_0(v)}} \in B(v,2)^c] \\ &\quad + E^x[f(X_{\tau_{D\cap B_0(v)}}); X_{\tau_{D\cap B_0(v)}} \in B(v,2) \backslash B_0(v)]. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik powyższej sumy jest postaci

$$\begin{aligned} & E^x[f(X_{\tau_{D\cap B_0(v)}}); X_{\tau_{D\cap B_0(v)}} \in B(v,2)^c] \\ &= \int_{B(v,2)^c} \int_{D\cap B_0(v)} G_{D\cap B_0(v)}(x,y) \left|y - z\right|^{-d-\alpha} f(z) d\mu(y) d\mu(z) \\ &\asymp E^x \tau_{D\cap B_0(v)} \int_{B(v,2)^c} \left|v - z\right|^{-d-\alpha} f(z) d\mu(z) \end{aligned}$$

Zajmiemy się drugim składnikiem sumy. Z lematu 2 i lematu 3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} & E^x[f(X_{\tau_{D\cap B_0(v)}}); X_{\tau_{D\cap B_0(v)}} \in B(v,2) \backslash B_0(v)] \\ &\leq P^x(X_{\tau_{D\cap B_0(v)}} \notin B_0(v)) \sup_{B(v,2)\backslash B_0(v)} f(z) \\ &\leq C E^x \tau_{D\cap B_0(v)} \int_{B(v,2)^c} \left|v - z\right|^{-d-\alpha} f(z) d\mu(z) \end{aligned}$$

ze stałą $C = C(\alpha)$. Mamy zatem

$$f(x) \asymp \Lambda_{v,2}(f) E^x \tau_{D\cap B_0(v)}.$$

Mamy $E^x \tau_{D\cap B_0(v)} \leq E^x \tau_D$. Ponadto ze wzoru (1.10) dostajemy

$$\begin{aligned} E^x \tau_D &= E^x \tau_{D\cap B_0(v)} + E^x[E^{X_{\tau_{D\cap B_0(v)}}} \tau_D; X_{\tau_{D\cap B_0(v)}} \in B_0(v)^c] \\ &\leq E^x \tau_{D\cap B_0(v)} + P_x(X_{\tau_{D\cap B_0(v)}} \notin B_0(v)) \sup_{y\in D} E^y \tau_D \\ &\leq E^x \tau_{D\cap B_0(v)} (1 + C' \sup_{y\in B(v,8)} E^y \tau_{B(v,8)}) \\ &= C'' E^x \tau_{D\cap B_0(v)} \end{aligned}$$

ze stałą $C' = C'(\alpha)$ i $C'' = C''(\alpha)$. Oczywiście $\Lambda_{v,2}(f) \le \Lambda_{v,1/2}(f)$ i z lematu 3 otrzymujemy

$$\Lambda_{v,1/2}(f) \le \Lambda_{v,2}(f) + C^{(3)}\mu(D \cap B(v,2))(1/2)^{-d-\alpha} \sup_{D\cap B(v,2)} f(x) \le C^{(4)}\Lambda_{v,2}(f),$$

ze stałymi $C^{(3)}$ i $C^{(4)}$ zależnymi tylko od $\alpha$. To kończy dowód lematu. $\square$

Dowód Twierdzenia 4: Na mocy lematu 7 dla $x, y \in D \cap B_n(v)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(x)g(y) &\le (C\Lambda_{v,2^{-n}}(f)E^x\tau_D)(C\Lambda_{v,2^{-n}}(g)E^y\tau_D) \\ &= C^4(C^{-1}\Lambda_{v,2^{-n}}(f)E^y\tau_D)(C^{-1}\Lambda_{v,2^{-n}}(g)E^x\tau_D) \le C^4 f(y)g(x), \end{aligned}$$

gdzie $C = c_{11}(\alpha)$. $\square$

# Rozdział 4

# Uwagi końcowe

Integralnym elementem naszych rozważań była analiza harmoniczna J. Kigamiego i teoria funkcji sklejanych. Pojęcia te faktycznie zostały rozwinięte dla większej klasy fraktali, tzw. PCF (zob. [36, 45]), zawierającej między innymi wielowymiarowe odpowiedniki trójkąta Sierpińskiego. Przy założeniu istnienia dyfuzji na takich zbiorach (konstrukcja dyfuzji na fraktalach typu PCF, podobnie jak na trójkącie Sierpińskiego, wydaje się osiągalna), daje to możliwość otrzymania analogicznych wyników jak w naszej pracy dla szerszej klasy fraktali.

Interesujące byłoby zastąpienie pojęcia funkcji sklejanych ogólniejszą teorią. Wymagałoby to jednak konstrukcji funkcji z dziedziny generatora ruchu stabilnego spełniającej pewne dodatkowe warunki (zob. lematy 3, 4) za pomocą bardziej abstrakcyjnych metod. Pozwoliłoby to otrzymać tak ogólny wynik np. w przypadku dywanu Sierpińskiego. Obecnie wydaje się to jednak bardzo trudne.

Innym kierunkiem dalszych badań może być próba rozszerzenia wyników na pozostały zakres parametru stabilności $\alpha$ (w szczególności na przypadek rekurencyjny $\alpha > d$) dla trójkąta Sierpińskiego. Zauważmy, że wystarczyłaby wiedza o tym, że proces stabilny nie uderza w brzeg kuli $B(x, r)$ w chwili wyjścia z niej. Ponieważ jednak brzeg kuli na trójkącie Sierpińskiego może być bardzo nieregularny, nie można stosować metod znanych z przestrzeni euklidesowych.

Przedstawiona w tej pracy brzegowa nierówność Harnacka jest pierwszym elementem dowodu twierdzenia o istnieniu granic ilorazów funkcji $\alpha$-harmonicznych na brzegu i reprezentacji Martina funkcji singularnie $\alpha$-harmonicznych. Wydaje się, że możliwe jest uzyskanie przynajmniej cześciowych wyników w tym kierunku.

# Bibliografia


[1] A. Ancona, *Principle de Harnack à la frontiere et theoreme de Fatou pour un operateur elliptique dans un domaine lipschitizien*, Ann. Inst. Fourier 28, 4 (1978), s. 169–213.

[2] M. T. Barlow, *Diffusions on fractals*, Lectures on Probability Theory and Statistics: Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXV, Springer, Berlin Heidelberg New York 1998.

[3] M. T. Barlow, R. F. Bass, *Coupling and Harnack inequalities for Sierpiński carpets*, Bull. AMS 29 (1993), s. 208–212.

[4] M. T. Barlow, R. F. Bass, *Brownian motion and harmonic analysis on Sierpiński carpets*, Canadian J. Math. 54 (1999), s. 673–744.

[5] M. T. Barlow, R. F. Bass, *The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet*, Ann. Inst. Henri Poincaré 25 (1989), s. 225–257.

[6] M. T. Barlow, E. A. Perkins, *Brownian motion on the Sierpiński gasket*, Prob. Theory Related Fields 79 (1988), s. 543–623.

[7] J. Bertoin, *Levy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[8] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Pure Appl. Math., Academic Press, New York 1968.

[9] K. Bogdan, *The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian*, Studia Math. 123 (1997), s. 43–80.

[10] K. Bogdan, *Representation of $\alpha$-harmonic functions in Lipschitz domains*, Hiroshima Math. J. 29, 2 (1999), s. 227–243.

[11] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Probabilistic proof of boundary Harnack principle for $\alpha$-harmonic functions*, Potential Anal. 11, 2 (1999), s. 135–156.

[12] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory for the $\alpha$-stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domains*, Studia Math. 133, 1 (1999), s. 53–92.

[13] K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, *Estimates and structure of $\alpha$-harmonic functions*, Prob. Theory Rel. Fields 140, 3–4 (2008), s. 345-–381.

[14] K. Bogdan, A. Stós, P. Sztonyk, *Harnack inequality for stable processes on d-sets*, Studia Math. 158, 2 (2003), s. 163–198.

[15] Z. -Q. Chen, T. Kumagai, *Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets*, Stoch. Proc. Their Appl., 108 (1) (2003), pp. 27-62.

[16] K. L. Chung, Z. Zhao, *From Brownian motion to Schroedinger's equation*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[17] B. Dahlberg *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1977), s. 275–288.

[18] K. Darlymple, R. Strichartz, J. P. Vinson, *Fractal differential equations on the Sierpinski Gasket*, J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999), s. 203–284.

[19] G. Doetsch *Introduction to the theory and aplications of the Laplace Transformation*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

[20] E. B. Dynkin, *Markov processes I*, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften 121-122, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965 (tłumaczenie z jęz. rosyjskiego).

[21] S. Goldstein, *Random walks and diffusions on fractals*, w *Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems*, IMA vol. Math Appl. 8, 121-128, Springer, New York-Berlin-Heidelberg 1987.

[22] K. J. Falconer, *Geometry of fractal sets*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[23] K. J. Falconer, *Fractal geometry*, Wiley, 1990.

[24] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, New York, 1969.

[25] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, second edition, Willey, New York, 1971.

[26] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, deGruyter Studies in Math. 19, 1994.

[27] M. Fukushima, T. Shima, *On a Spectral Analysis for the Sierpinski Gasket*, Potential Analysis 1 (1992), s. 1–35.

[28] D. S. Jerison, C. E. Kenig, *Boundary bahavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains*, Adv. in Math. 46 (1982), s. 171–194.

[29] A. Jonsson, H. Wallin, *Functions spaces on subsets of* $\mathbf{R}^N$, Math. Rep. t. 2, cz. I, Harwood Acad. Publ., Londyn 1984.

[30] S. Kakutani, *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), s. 706—714.

[31] S. Kakutani, *On Brownian motions in n-space*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944), s. 648-–652.

[32] J. Kigami, *A harmonic calculus on the Sierpinski spaces*, Japan. J. Appl. Math. 8 (1989), s. 259–290.

[33] J. Kigami, *Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), s. 721–755.

[34] J. Kigami, *Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpinski gasket*, w *Asymptotic Problems in Probability Theory*, ed. K. D. Elworthy, N. Ikeda, s. 201–218, Longman Scientific, Harlow UK 1990.

[35] J. Kigami, *Laplacians on self-similar sets and their spectral distributions*, Fractal Geometry and stochastics (Firstenbergen, 1994), s. 221–238, Progr. Probab., 37, Birkhauser, Basel, 1995.

[36] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[37] T. Kumagai, *Some remarks for stable-like processes on fractals*, W: Proc. of Conference held in Graz 2001, pp. 185-196, Birkhäuser 2002.

[38] S. Kusuoka, *A diffusion process on a fractal*, w *Probabilistic methods in mathematical physics*, Proceedings Taniguchi Symposium, Katata 1985, Amsterdam, Kino Kuniya-North Holland, 1987, s. 251–274 .

[39] K. Pietruska-Pałuba, *On functions spaces related to the fractional diffusions on d-sets*, Stoch. Rep. 70 (2000), s. 153–164.

[40] R. Song, J.-M. Wu, *Boundary Harnack Principle for Symmetric Stable Processes*, J. Funct. Anal. 168 (1999), s. 403–427.

[41] A. Stós, *Symmetric $\alpha$-stable processes on $d$-sets*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48, 3 (2000), s. 237–245.

[42] A. Stós, *Boundary Harnack Principle for fractional power of Laplacian on the Sierpiński carpet*, Bull. Sci. Math. 130, 7 (2006), s. 580–594.

[43] R. S. Strichartz, *Taylor approximations on Sierpinski gasket type fractals*, J. Fourier Anal 174 (2000), s. 76–127

[44] R. S. Strichartz, *Analysis on fractals*, Notices AMS 46 (1999), s. 1199–1208,

[45] R. S. Strichartz, M. Uscher, *Splines on fractals*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 129, 2 (2000), s. 331–360.