Lista 2 z Podstaw logiki, teorii automatów i obliczalności
do wykładu dra hab. Sz. Żeberskiego

1. Niech zakresem zmiennośc zmiennych będą liczby naturalne. Zapisz przy użyciu symboli $0,\ 1,\ +,\ \cdot,\ \leq, |$ oraz symboli logicznych następujące zdania i funkcje zdaniowe:

   a) x jest liczbą parzystą,

   b) każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych (hipoteza Goldbacha),

   c) każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych (twierdzenie Lagrange'a).

   d) x jest liczbą pierwszą,

   e) $x = NWD(y, z)$,

   f) każde dwie liczby mają najmniejszą wspólną wielokrotność,

   g) nie istnieje największa liczba pierwsza,

   Zaneguj otrzymane zdania i formuły.

2. Niech zakresem zmienności zmiennych będzie zbiór liczb rzeczywistych. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $=,\ <,\ \leq,\ +,\ \cdot$ i $\mathbb{Q}$ następujące zdania i formuły:

   a) kwadrat każdej liczby jest nieujemny,

   b) pomiędzy dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba wymierna,

   c) funkcja f jest malejąca,

   d) funkcja f jest monotoniczna,

   e) liczba a jest ograniczeniem górnym zbioru A,

   f) liczba a jest kresem górnym zbioru A.

   Zaneguj otrzymane zdania i formuły.

3. Niech zakresem zmienności zmiennych będzie pewien zbiór Ω. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $\in, =$ następujące zdania i formuły:

   a) zbiory A i B są rozłączne,

   b) A jest zbiorem potęgowym zbioru B,

   c) C jest parą uporządkowaną,

   d) C nie jest iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B.

4. Niech formuła $r(x, y)$ oznacza, że x jest rodzicem y, niech $m(x)$ oznacza, że x jest mężczyzną. Zdefiniuj za pomocą formuł r oraz m następujące formuły:

   a) x jest bratem y,

   b) x jest kuzynką y,

   c) x jest pradziadkiem y,

   d) x ma dokładnie 2 wnuczki.

5. Niech R będzie relacją na X. Zapisz formuły

   a) R nie jest relacją symetryczną,
   b) R jest zwrotna na X, ale nie jest przechodnia,
   c) R jest słabo antysymetryczna i symetryczna.

   Podaj przykłady relacji spełniających powyższe formuły.

6. Niech $R = \{(n, n+1) : \; n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz najmniejszą relację przechodnią na zbiorze $\mathbb{N}$ zawierającą relację R.

7. Wyznacz zbiory $\emptyset^\emptyset$, $X^\emptyset$, $\emptyset^X$, $\{X\}^\emptyset$, $\emptyset^{\{X\}}$, $\{X\}^{\{X\}}$, gdzie X jest dowolnym zbiorem niepustym.

8. Niech f będzie funkcją, a A – zbiorem. Pokaż, że $f \restriction A$ jest funkcją i $dom(f \restriction A) = dom(f) \cap A$.

9. Niech f i g będą funkcjami. Pokaż, że $f \cup g$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f \restriction (dom(f) \cap dom(g)) = g \restriction (dom(f) \cap dom(g)).$$

10. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem $f((x, y)) = (x + y, x - y)$.

    a) Czy odwzorowanie f jest iniekcją?
    b) Czy f jest suriekcją?
    c) Znajdź $f[\mathbb{R} \times \{0\}]$, $f[L]$ oraz $f^{-1}[L]$, gdzie L jest prostą zadaną równaniem $y = x + 1$.

11. Dla zadanych trójek: funkcja f, zbiór A, zbiór B znajdź $f[A]$, $f^{-1}[B]$ oraz sprawdź, czy f jest suriekcją, iniekcją.

    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$, $A = [-1, 2]$, $B = [-1, 1]$.
    b) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = xy$, $A = \{(x, y) : \; \neg(2|(x+y))\}$, B jest zbiorem liczb pierwszych.
    c) $f : \mathbb{N} \times P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in y \\ x+1 & \text{dla } x \notin y \end{cases}$, $A = \mathbb{N} \times \{\emptyset\}$, $B = \{0, 1, 2\}$.

12. Znajdź bijekcje pomiędzy następującymi parami zbiorów:

    a) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$,
    b) $(0, 1)$ i $(3, 5)$,
    c) $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$,
    d) $(0, 1)$ i $\mathbb{R}^+$,
    e) $[0, 1]$ i $[0, 1)$,
    f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.