Lista 1 z Teoretycznych podstaw informatyki i elementów logiki
do wykładu dra hab. Sz. Żeberskiego

1. Wskaż wolne i związane wystąpienia zmiennych w poniższych formułach. Jaka jest sygnatura języka?

   a) $(\exists x)(\forall y)(f(x,y) = z)$,

   b) $(\exists x)(\forall y)(f(x,x) = y) \wedge R(x,y,z)$,

   c) $(\exists x)(R(x,x)) \vee (\forall x)(f(x,x) = a)$,

   d) $(\exists x)(\forall x)(f(x,y) = z \to x = y)$.

2. Pokaż, że każda formuła φ jest równoważna formule φ' postaci

$$\varphi' = Q_0 x_{i_0} Q_1 x_{i_1} \ldots Q_n x_{i_n} \phi(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, \ldots),$$

   gdzie $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ oraz ϕ nie zawiera kwantyfikatorów. (Mówimy wtedy, że φ' jest w prefiksowej postaci normalnej.)

3. Załóżmy, że sygnatura języka $\mathcal{L}$ ma postać $(\{f,g\},\{P,Q\},\{a,b\})$, gdzie $P,\ Q$ są nazwami na predykaty binarne (relacje), f nazwą na funkcję 1-argumentową, a g - na funkcję 2-argumentową.

   a) Wypisz wszystkie termy o długości ≤ 10.

   b) Wypisz wszystkie zdania o długości ≤ 20.

4. Załóżmy, że sygnatura języka $\mathcal{L}$ ma postać $(\{f,g\},\{P,Q\},\{a,b\})$, gdzie $P,\ Q$ są nazwami na predykaty binarne (relacje), f nazwą na funkcję 1-argumentową, a g - na funkcję 2-argumentową.

   a) Podaj przykłady nieskończonych modeli dla tego języka.

   b) Zinterpretuj termy $f(f(f(a)))$, $g(g(a,f(b)), g(b,f(a)))$ w tych modelach.

   c) Czy zadnie $(\forall x)(\exists y)(f(a) = g(x,y) \to (\forall x)(g(x,x) = f(b)))$ jest spełnione w tych modelach?

5. Załóżmy, że sygnatura języka $\mathcal{L}$ ma postać $(\emptyset,\emptyset,\emptyset)$. Znajdź nieskończoną kolekcję zdań $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ w tym języku oraz nieskończoną kolekcję modeli $\{\mathbb{M}_n : n \in \mathbb{N}\}$ czyniącą zadość równoważności:

$$\mathbb{M}_k \models \varphi_n \quad \longleftrightarrow \quad k = n.$$

6. Załóżmy, że sygnatura języka $\mathcal{L}$ ma postać $(\emptyset,\{\in\},\emptyset)$. Sformułuj w tym języku aksjomaty teorii mnogości, które znasz.

7. Zapisz aksjomaty teorii grup w języku

   a) składającym się z symboli $\cdot, ^{-1}, e$, gdzie $\cdot$ oznacza funkcję dwuargumentową, $^{-1}$ – funkcję jednoargumentową, e – stałą;

   b) składającym się z symbolu $\cdot$;

   c) posiadającym tylko jeden symbol R relacji ternarnej.

8. Podaj przykłady struktur (modeli) powyższych języków, które są / nie są grupami. Czy dla dowolnej liczby kardynalnej κ istnieje grupa mocy κ?

9. Udowodnij, że produkt dwóch grup jest grupą. Zacznij od rozsądnego określenia działania. Czy fakt ten można rozszerzyć na dowolne produkty (niekoniecznie skończone)?

10. Niech $H < G$, czyli H jest podgrupą G. Warstwą lewostronną nazywamy zbiór $gH = \{gh : h \in H\}$. Udowodnij, że zbiór warstw lewostronnych stanowi partycję G.

11. Mówimy, że H jest dzielnikiem normalnym G jeśli dla dowolnego $g \in G$ mamy $gH = Hg$. Grupą ilorazową nazywamy zbiór G/H warstw. Udowodnij, że to w istocie jest grupa (z naturalnym działaniem).

12. Sformułuj aksjomaty

a) teorii grup abelowych,
b) teorii pierścieni,
c) teorii ciał,
d) teorii częściowych porządków,
e) teorii liniowych porządków,
f) teorii relacji równoważności.

Jak wyglądają sygnatury języków modeli tych teorii? Jakie termy można z nich utworzyć?

13. Zapisz zdanie (lub kolekcję zdań), które jest prawdziwe tylko w modelach

a) o mocy co najmniej 3,
b) o mocy 3,
c) o mocy co najwyżej 3,
d) nieskończonych.

14. Czy istnieje zdanie φ takie, że $M \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest skończony.

15. Ile parami różnych termów można utworzyć w języku o sygnaturze $(\{f_j\}_{j\in J}, \{P_i\}_{i\in I}, \{c_k\}_{k\in K})$? Rozważ przypadki, w których $|I|,\ |J|,\ |K|$ przyjmują wartości $0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \mathfrak{c}$.

16. Czy teoria

a) częściowych porządków,
b) liniowych porządków,
c) relacji równoważności,
d) ciał

jest niesprzeczna? zupełna?

17. Udowodnij, że dowolne dwa liniowe gęste porządki mocy $\aleph_0$ są izomorficzne. Czy analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla porządków mocy $\mathfrak{c}$?

18. Czy $(\mathbb{N}, \leq) \cong (\mathbb{Z}, \leq)$? Czy $(\mathbb{N}, \leq) \equiv (\mathbb{Z}, \leq)$?

19. Udowodnij, że $M \cong N$ implikuje $M \equiv N$.

20. Znajdź przykład takich modeli $M,\ N$, że $M \equiv N$, ale nieprawda, że $M \cong N$.

21. Udowodnij, że jeśli $M \equiv N$ oraz $\mathcal{L},\ M$ są skończone, to $M \cong N$. Wskazówka: Znajdź zdanie takie, że $M \models \varphi$ oraz jeśli $N \models \varphi$, to $M \cong N$.

22. Dowiedź twierdzenie Lindenbauma stanowiące, że dowolna niesprzeczna teoria T jest zawarta w pewnej zupełnej niesprzecznej teorii T'. Wskazówka: Użyj lematu Kuratowskiego-Zorna.

23. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności określoną na zbiorze

$$P = \{R : \ (\mathbb{N}, R) \text{ jest częściowym porządkiem}\}$$

zdefiniowaną formułą

$$R \sim S \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (\mathbb{N}, R) \equiv (\mathbb{N}, S).$$

Znajdź moc zbioru $P/\sim$.